論文内容の要旨

論文題目: 市場の歪みに対する資産価格モデル

氏名 : 伏屋　広隆

現実の金融市場では様々な要因によって資産の価格が一時的に本来あるべき価格から乖離することがある。本論文では市場が歪みに対する２つの資産価格のモデルについて考察する。

1　１次元マルコフ過程の粘性的反射壁ブラウン運動への収束

$\mu_W^\lambda, \lambda \in (0,1]$, は $\mathbf{R}$ 上の確率分布、$\mu_{Z+}^\lambda, \lambda \in (0,1]$, は $(0,\infty)$ 上の確率分布、$p^\lambda \in (0,1]$, $\lambda \in (0,1]$ は数列とする。これらに対して以下の仮定 (A.1),(A.2) が成立するものとする。

$(A.1)$　正の定数 a, K が存在して、

$$\sup_{\lambda\in(0,1]} \int_{\mathbf{R}} e^{a|x|}\mu_W^\lambda(dx) < \infty,$$

$$\left|\int_{\mathbf{R}} x\mu_W^\lambda(dx)\right| \le K\lambda^2, \int_{\mathbf{R}} x^4\mu_W^\lambda(dx) + \int_{(0,\infty)} x^4\mu_{Z+}^\lambda(dx) \le K\lambda^4, \quad \lambda \in (0,1].$$

$(A.2)$　正の定数 σ, m_{Z+}, p が存在して、

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda^{-2}\int_{\mathbf{R}} x^2\mu_W^\lambda(dx) = \sigma^2,\ \lim_{\lambda\to 0}\lambda^{-1}\int_{(0,\infty)} x\mu_{Z+}^\lambda(dx) = m_{Z+}, \lim_{\lambda\to 0}\lambda^{-1}p^\lambda = p.$$

$\{W_n^\lambda\}_{n=0}^\infty, \{Z_n^\lambda\}_{n=0}^\infty$ は次の性質を満たす $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上の確率過程とする。

1　$W_n^\lambda, Z_n^\lambda, n = 1, 2, \cdots,$ は独立。

2　$\{W_n^\lambda\}_{n=0}^\infty$ は同じ分布をもち、分布は μ_W^λ で与えられる。

3　$\{Z_n^\lambda\}_{n=0}^\infty$ は同じ分布をもち $Z_n^\lambda \ge 0 \ \ a.s.,$　$\mathbf{P}(Z_n^\lambda \in dx | Z_n^\lambda > 0) = \mu_{Z+}^\lambda(dx),$

$$\mathbf{P}(Z_n^\lambda = 0) = 1 - p^\lambda.$$

$\mathcal{F}_n = \sigma(W_m^\lambda, Z_m^\lambda; 0 \le m \le n)$ とおき、確率過程 $\{X_n^\lambda(x)\}_{n=0}^\infty$, $x \in [0,\infty), \lambda \in (0,1]$, を帰納的に

$$X_0^\lambda(x) = x,$$

$$X_{n+1}^\lambda(x) = \begin{cases} (X_n^\lambda(x) + W_{n+1}^\lambda) \vee 0, & X_n^\lambda(x) > 0, \\ \\ Z_{n+1}^\lambda, & X_n^\lambda(x) = 0. \end{cases}$$

で定義する。このマルコフ過程 $\{X_n^\lambda(x)\}_{n=0}^\infty$ を粘性的反射壁ランダムウォークという。また、

$$S_n^\lambda(x) = x + \sum_{k=1}^n W_k^\lambda, \quad \lambda \in (0,1],$$

$$\tau^\lambda(x) = \inf\{n \ge 0; X_n^\lambda(x) = 0\} = \inf\{n \ge 0; S_n^\lambda(x) \le 0\},$$

$$c(\lambda,\eta) = \mathbf{E}\left[e^{-\frac{\sqrt{2\eta}}{\sigma}W_1^\lambda}\right],$$

を定義し、(B.1)〜(B.3) を仮定する。

(B.1) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} x\mu_W^\lambda(dx) = 0.$

(B.2) $$\overline{\lim}_{\eta\to 0}\ \overline{\lim}_{\lambda\to 0} \int_0^\infty \mathbf{E}\left[c(\lambda,\eta)^{-\tau^\lambda(x)}\left(-\lambda^{-1}S_{\tau^\lambda(x)}^\lambda(x)\right)\right]\mu_{Z+}^\lambda(dx)$$
$$= \underline{\lim}_{\eta\to 0}\,\underline{\lim}_{\lambda\to 0} \int_0^\infty \mathbf{E}\left[c(\lambda,\eta)^{-\tau^\lambda(x)}\left(-\lambda^{-1}S_{\tau^\lambda(x)}^\lambda(x)\right)\right]\mu_{Z+}^\lambda(dx) = \beta.$$

(B.3) $$\lim_{\eta\to 0}\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda\sqrt{\eta}}\int_0^\infty \mathbf{E}\left[c(\lambda,\eta)^{-\tau^\lambda(x)}\left(e^{-\frac{\sqrt{2\eta}}{\sigma}S_{\tau^\lambda(x)}^\lambda(x)} - 1 + \frac{\sqrt{2\eta}}{\sigma}S_{\tau^\lambda(x)}^\lambda(x)\right)\right]\mu_{Z+}^\lambda(dx)$$
$$= 0.$$

さらに、

$$\widetilde{X}_t^\lambda(x) = X_{[\lambda^{-2}t]}^\lambda(x) + (\lambda^{-2}t - [\lambda^{-2}t])(X_{[\lambda^{-2}t]+1}^\lambda(x) - X_{[\lambda^{-2}t]}^\lambda(x)),$$

$$\widetilde{S}_t^\lambda = S_{[\lambda^{-2}t]}^\lambda(0) + (\lambda^{-2}t - [\lambda^{-2}t])(S_{[\lambda^{-2}t]+1}^\lambda(0) - S_{[\lambda^{-2}t]}^\lambda(0)),$$

とし、$\{(\widetilde{X}_t^\lambda(x), \widetilde{S}_t^\lambda),\ t \ge 0\}$ の与える $(\mathbf{C}([0,\infty);\mathbf{R}^2),\ \mathcal{B}(\mathbf{C}([0,\infty);\mathbf{R}^2)))$ 上の分布を $\mathbf{Q}^\lambda$ とする。このとき、次の定理が成立する。

定理 1.1 $\mathbf{Q}^\lambda$ は $\lambda \downarrow 0$ のとき $\mathbf{C}([0,\infty);\mathbf{R}^2)$ 上の確率測度として弱収束する。その収束先を $\mathbf{Q}$ とする。$w = (w_1, w_2) \in \mathbf{C}([0,\infty);\mathbf{R}^2)$ に対して $X_t = X_t(w) = w_1(t)$, $W_t = W_t(w) = \sigma^{-1}w_2(t)$ とおくと、$\mathbf{Q}$ の下で $\{W_t\}$ は Wiener 過程であり、

$$X_t = x + \sigma \int_0^t 1_{(0,\infty)}(X_s)dW_s + p(m_{Z+} + \beta)\int_0^t 1_{\{0\}}(X_s)ds, \quad t \geq 0,$$

が成立する。

先行研究としては Amir[1], Harrison,M.J.-Lemonine,J.A.[2] の研究がある。Amir [1] では $\mathbf{P}(W_n^\lambda = \pm\lambda) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(Z_n^\lambda = \lambda | Z_n^\lambda > 0) = 1$ の場合における収束定理が示されおり、Harrison-Lemonine [2] では $\mathbf{P}(W_n^\lambda \in dx | W_n^\lambda > 0)$ と $\mathbf{P}(Z_n^\lambda \in dx | Z_n^\lambda > 0)$ がポアソン分布で、正の定数 K が存在して $\mathbf{P}(W_n^\lambda = -K\lambda | W_n^\lambda < 0) = 1$ の場合における収束定理が示されている。

2 Asymptotic Expansion for a Filtering Problem and a Short Term Rate Model

$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}, \mathbf{P})$ をフィルター付確率空間とする。$\{(W_t^1, W_t^2)\}_{t\in\mathbf{T}}$ を $l + l'$ 次元 $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動、$\mathbf{T} = [0,T], T > 0$、$b : \mathbf{T} \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$, $\sigma_1 : \mathbf{T} \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^l$ を連続関数とする。各 $\varepsilon \in [0,\infty)$ に対して次の確率微分方程式を考える。

$$X_t(\varepsilon) = x_0 + \int_0^t b(s, X_s(\varepsilon))\, ds + \varepsilon \int_0^t \sigma_1(s, X_s(\varepsilon))\, dW_s^1, \qquad t \in \mathbf{T}. \tag{1}$$

$F : [0,\infty) \times \mathbf{T} \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{l'} \to \mathbf{R}^{l'}$, $\sigma_2 : \mathbf{T} \times \mathbf{R}^{l'} \to \mathbf{R}^{l'} \otimes \mathbf{R}^{l'}$ は有界な連続関数で $\{Y_t\}_{t\in T}$ は次の確率微分方程式を満たすとする。

$$Y_t(\varepsilon) = \int_0^t \mathcal{F}_s ds + \int_0^t \sigma_2(s, Y_s(\varepsilon))dW_s^2. \tag{2}$$

この章では $X_t(\varepsilon)$ をシステム過程、$Y_t(\varepsilon)$ を観測過程とするフィルタリング問題 (c.f. Kallianpur [4] およびその参考文献) を考える。$\mathcal{G}_t = \sigma(Y_s(\varepsilon); 0 \leq s \leq t), t \in \mathbf{T}, \varepsilon \geq 0$ とする。我々の目的は任意の有界でなめらかな関数 $g(x)$ に対して $\mathbf{E}[g(X_t(\varepsilon))|\mathcal{G}_t]$ の漸近展開を与えることである。漸近展開のファイナンスへの応用研究は Kunitomo

& Takahashi [5], [6] がある。また、我々の定理の類似研究として Hisanaga [3] がある。以下を仮定する。

(A.1) 確率微分方程式 (1) は任意の $\varepsilon \in [0,1]$ に対して強い解を一意にもち、$\sup_{t \in T} \mathbf{E}\left[|X_t(\varepsilon)|^p\right] < \infty$ が成立する。

(A,2) 定数 $K > 0$ が存在して

$$\|F(\varepsilon,t,x,y) - F(\varepsilon,t,x,z)\| + \|\sigma_2(t,y) - \sigma_2(t,z)\| \leq K\|y-z\|$$

が任意の $(\varepsilon,t,x,y,z) \in [0,\infty) \times \mathbf{T} \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{l'} \times \mathbf{R}^{l'}$ に対して成立する。

(A.3) 定数 $\eta > 0$ が存在して、$b(t,x)$, $\sigma_1(t,x)$ は次の閉集合の上でなめらかである。

$$D_\eta = \{(t,x) \in \mathbf{T} \times \mathbf{R}^d; \|x - X_t(0)\| \leq \eta\}.$$

また、F は $[0,1] \times D_\eta \times \mathbf{R}^{l'}$ の上でなめらかである。

(A.4) $\sigma_2(t,x)^{-1}$ が存在して (t,x) について有界である。

この下で我々は次の定理を得る。

定理 2.1 $g : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ はなめらかな関数で、定数 $N > 0$, $K > 0$ に対して、

$$|g(x)| \leq K(1 + |x|^N), \ x \in \mathbf{R}^d$$

が成立するものとする。このとき任意の $t \in \mathbf{T}$ に対して、可測汎関数 $h^{(k)} : C(\mathbf{T};\mathbf{R}^{d'}) \to \mathbf{R}$, $k = 0,1,2,\cdots$ が存在して、

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{E}\left[\left|\frac{1}{\varepsilon^n}\{\mathbf{E}[g(X_t(\varepsilon))|\mathcal{G}_t] - \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k h^{(k)}(Y_\cdot(\varepsilon))\}\right|^p\right] = 0,$$

が任意の $p \in (1,\infty)$, $n \in \mathbf{N}$ に対して成立する。

参考文献

[1] Amir,M. Sticky Brownian motion as the strong limit of a sequence of random walks, Stochastic Process. Appl. 39, 1991, no.2, 221-237.

[2] Harrison,M.J. & Lemoine,J.A., Sticky Brownian motion as the limit of storage processes, J. Appl. Probab. 18, 1981, 216-226.

[3] Hisanaga,T., The Filtering Problem for Affine Term Structure Model of the bond, in Japanese, Master Thesis University of Tokyo, 1996.

[4] Kallianpur,G., Stochastic filtering: a part of stochastic nonlinear analysis, Proceedings of the Nobert Wiener Centenary Congress, 1994, 371-385.

[5] Kunitomo,N. & Takahashi,A., The asymptotic expansion approach to the valuation of interest rate contingent claims, Mathematical Finance. 11, No.1, 2001, 117-151.

[6] Kunitomo,N. & Takahashi,A., On validity of the asymptotic expansion approach in contingent claim analysis, Ann. Appl. Probab. 13, No.3, 2003, 914-952.