論文の内容の要旨

論文題目　Motivic interpretation of Milnor K-groups attached to Jacobian varieties

和訳　Jacobi 多様体に付随する Milnor K 群の motif 論的解釈

氏名　望月 哲史

[Som90] では、加藤和也氏が定義した基礎体 k 上の 半 abel 多様体 $G_1,G_2,...,G_r$ に付随する Milnor$K$ 群 $K(k,G_1,...G_r)$ が研究されている。本論文では、[Som90] で染川氏によって提案された $K(k,G_1,...G_r)$ の motif 論的解釈について考察している。つまり

予想 1. *(染川予想)*
$G_1,...,G_r$ を基礎体 k 上の半 *abel* 多様体とすると、$K(k,G_1,...,G_r)$ は

$$\mathrm{Ext}^r_{\mathcal{M}_k}(\mathbb{Z},G_1[-1]\otimes...\otimes G_r[-1])$$

と同型であろうか？ ここに、$\mathcal{M}_k$ は体 k 上の然るべき *motif* の圏である。

本論文では、$\mathcal{M}_k$ として Voevodsky 氏が [TriCa] に於いて構成した、k 上の幾何的 motif の圏 $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$ を採用して、半 abel 多様体として Jacobi 多様体を考えた時の上の予想に挑んでいる。そこで、本論文第４章ではまず、点付きの滑らかな曲線 $(C_1,x_1),...,(C_r,x_r)$ に付随する motivic 複体 $\mathbb{Z}(\bigwedge_{i=1}^{r}(C_i,x_i))$ を考察した。これは $(C_1,x_1)=...=(C_r,x_r)=(\mathbb{G}_{\mathrm{m}},1)$ の時は、Voevodsky 氏の motivic 複体 $\mathbb{Z}(r)$ と一致する。$\mathbb{Z}(r)$ の場合の 上記予想は、[BKcon] で証明されている。本論文第５章では次を証明した。

主定理 2. *(Jacobi 多様体の染川予想 [MotIn] Theorem 5.31)*
k は特異点解消を許す完全体とする。$(C_1, x_1), ..., (C_r, x_r)$ を k 上の 射影的な滑らかな点付き曲線とする。この時、次の同型が成立する。

$$K(k, \mathrm{Jac}\, C_1, ..., \mathrm{Jac}\, C_r) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM_{gm}}(k)}(M(\mathrm{Spec}\, k), \mathbb{Z}(\bigwedge_{i=1}^{r}(C_i, x_i))[r]).$$

主定理の左辺の群は、基礎体 k が完全体の時、[CohTh] を用いると、$\mathbb{Z}(\bigwedge_{i=1}^{r}(C_i, x_i))$ の $\mathrm{Spec}\, k$ への制限の cohomology 群として記述出来て、生成元と関係式で表す事が出来る。両者の群の関係式を比較する際に証明の要となるのは、次の定理である。

定理 3. *(Motif 論的相互律 [MotIn] Theorem 5. 18)*
K を基礎体 k 上の代数関数体とすると、次の合成は $\mathrm{Pro\text{-}DM_{gm}}(k)$ に於いて零射である。

$$\mathrm{M_{gm}}(\mathrm{Spec}\, k)\{1\} \xrightarrow{\Sigma \mathrm{N}_{k(v)/k}\{1\}} \bigoplus_{v} \mathrm{M_{gm}}(\mathrm{Spec}\, k(v))\{1\} \xrightarrow{\oplus \partial_v} \mathrm{M_{gm}}(\mathrm{Spec}\, K)$$

この定理は、C を K を関数体に持つ非特異射影的曲線とする時、次の可換性に帰着される。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M_{gm}}(\mathrm{Spec}\, k(x))((1)) & \mathrm{M_{gm}}(C) \arrow[l] \\
 & \mathrm{M_{gm}}(\mathrm{Spec}\, k)((1)). \arrow[u] \arrow[ul, "\mathrm{N}_{k(x)/k}((1))"]
\end{tikzcd}$$

この図式の可換性は、第 3 章で展開された motif 間の様々な射の両立性に関する一般論の帰結である。
又、motif 論的相互律は、基礎体が完全体の時は、[Sus82] の Milnor$K$ 群の Weil 相互律の一般化になっている事も示した。([MotIn] Corollary 5. 25)
謝辞 本論文を書くにあったって、斎藤毅先生、斎藤秀司先生、加藤和也先生、山崎隆夫先生、木村健一郎先生に 有益な助言を戴いた事を感謝致します。

参考文献

[Som90] M. Somekawa, *On Milnor K-groups attached at semi-Abelian varieties*, K-theory, **4** (1990), p. 105-119.

[Sus82] A. Suslin, *Menicke symbols and their applications in the K-theory of fields*, Procedings of a Conference held at Oberwolfach, June 16-20, 1980, Springer-Verlag, Berlin, 1982, p. 334-356.

[BKcon] A. Suslin and V. Voevodsky, *Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients*, The Arithmetic and Geometry of

Algebraic Cycles, Nato ASI series C, vol. 548, Kluwer, (2000), p. 117-189.

[MotIn] S. Mochizuki, *Motivic interpretation of Milnor K-groups attached to Jacobian varieties*, thesis

[CohTh] V. Voevodsky, *Cohomological theory of presheaves with transfers*, in *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Annals of Mathematics Studies, vol **143**, Princeton University press, (2000), p. 87-137.

[TriCa] V. Voevodsky, *Triangulated categories of motives over field*, in *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Annals of Mathematics Studies, vol **143**, Princeton University press, (2000), p. 188-254.