論文の内容の要旨

論文題目　Hyperplane Arrangements and Determinants of Period Matrices
(超平面配置と周期行列の行列式)

氏名　土岐豊嗣

f_0 を $x_1,\dots,x_n$ の多項式、$f_i = u_{i0} + \sum_{j=1}^{n} u_{ij}x_j (1 \le i \le m)$ を実数係数１次式、H_i を $\{f_i = 0\}$ よって定義される $\mathbb{C}^n$ の超平面、$\mathscr{A}$ を $\{H_1,\dots,H_m\}$ によって定義される $\mathbb{C}^n$ の超平面配置、L を $\mathscr{A}$ の intersection lattice とする。M を $\mathscr{A}$ の補集合 $\mathbb{C}^n - \cup_{i=1}^{m} H_i$ とし、$\lambda_i (1 \le i \le m) U$ を実数として U を $U = \exp(f_0) f_1^{\lambda_1} \cdots f_m^{\lambda_m}$、で定義される M 上の多価関数とする。接続 ∇ を $d + d\log U$ によって定め $\mathscr{L}$ を微分方程式 $\nabla h = 0$ の局所解によって定義される局所定数層とし、$\mathscr{L}^{\vee}$ をその双対とする。局所定数層 $\mathscr{L}, \mathscr{L}^{\vee}$ に対して、その (singular) ツイストホモロジー群 $H_*(M, \mathscr{L}^{\vee})$ と (de Rham) ツイストコホモロジー群 $H^*(M, \mathscr{L})$ が定義できる。この両者には完全な pairing $H_*(M, \mathscr{L}^{\vee}) \times H^*(M, \mathscr{L}) \longrightarrow \mathbb{C}$ が超幾何積分 $(\Delta, \varphi) \to \int_{\Delta} U\varphi$ によって定義される。$H_*(M, \mathscr{L})$ の基底 $\mathbf{c}$、$H^*(M, \mathscr{L}^{\vee})$ の基底 $\mathbf{n}$ をとったとき $P = (\int_{\Delta} U\varphi)_{\Delta \in \mathbf{c}, \varphi \in \mathbf{n}}$ を周期行列という。

ここでは $H_*(M, \mathscr{L}^{\vee})$ と $H^*(M, \mathscr{L})$ の基底を求めることとその周期行列の行列式を求めることを問題とする。

$f_0 = 0$ の場合. *generic* な λ に対してツイストホモロジー群は $H_*(M, \mathscr{L}^{\vee}) = 0,\ (* \ne n)$ となり 、$H_n(M, \mathscr{L}^{\vee}) = \sum_{\Delta} \mathbb{C}\Delta$、となる。ここで Δ は $M_{\mathbb{R}^n} = M \cap \mathbb{R}^n$ の有界な部屋全体をわたる。ツイストコホモロジー群に関しては generic な λ に対して $H^*(M, \mathscr{L})$ は $H^*(M, \mathscr{L}) = 0,\ (* \ne n)$ となる。また Falk-Terao により $\beta - \mathbf{nbc}$ 基底と呼ばれる $H^n(M, \mathscr{L})$ の基底が超平面配置の組み合わせ論的な data を用いて明示的に与えられた。周期行列の行列式

は Varchenko により、$\mathscr{A}$ が一般の位置にある超平面配置あるいは無限遠平面において一般の位置にある超平面配置の場合に計算された。Varchenko はさらに任意の超平面配置に対して周期行列の行列式の予想をし、この予想は Douai-Terao により $\beta-\mathbf{nbc}$ base を用いて証明された。

この論文では $f_0=-\frac{1}{2}(x_1^2+\cdots+x_n^2)$ の場合を考察する。この場合、ツイストホモロジー群は $H_*(M,\mathscr{L}^\vee)=0,*\neq 0$ となり、$H_n(M,\mathscr{L}^\vee)$ の基底として $M_{\mathbb{R}^n}$ の部屋の集合 $\mathsf{ch}(\mathscr{A})$ がとれる。U は $M_{\mathbb{R}^n}$ の各部屋ごとにただひとつの非退化な臨界点をもっており、ツイストホモロジーの基底に対応している。青本はツイストコホモロジー群 $H^*(M,\mathscr{L})$ に関してつぎの予想をたてた。

予想 1. *generic* な λ に対して、$H_*(M,\mathscr{L})=0\ (*\neq n)$,

$$H^n(M,\mathscr{L})=\sum_{l=0}^{n}\sum_{(f_{i_1},\ldots,f_{i_l})}\mathbb{C}\frac{\Phi_0}{f_{i_1}\cdots f_{i_l}}. \tag{1}$$

ここで $\Phi_0=dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$ で、$(f_{i_1},\ldots,f_{i_l})$ は l 個の線形独立な組 $(f_{i_1},\ldots,f_{i_l})$ 全体をわたる。*Orlik-Terao* は *(1)* の右辺のベクトル空間の基底をもとめた。

Proposition 1.

$$\textit{RHS of (1)}=\oplus_{(i_1,\ldots,i_l)\in \boldsymbol{nbc}}\mathbb{C}\frac{\Phi_0}{f_{i_1}\cdots f_{i_l}}$$

ここで $\boldsymbol{nbc}$ とは $\mathscr{A}$ の線形順序を決めることにより組み合わせ論的に定義される $\mathscr{A}$ のある部分集合の集合である。

この論文では上の基底 $\mathbf{nbc}$ とツイストホモロジー群の基底 $\mathsf{ch}(\mathscr{A})$ に関する周期行列 $P(\lambda_i,u_{jk})$ の行列式の予想を与えいくつかの場合についてこれを示す。

まず任意の超平面配置に関しては次の公式が予想される。

予想 2. $\lambda_i>0(1\leq i\leq m)$ ならば、

$$\mathrm{Det}\ P=\pm c_0\Big(\prod_{i=1}^{m}c_i^{\lambda_i}\Big)\prod_{X\in L}\Gamma(\lambda_X)^{\alpha(X)}. \tag{2}$$

c_0,c_i は次の式により与えられる。

$$c_0=(2\pi)^{\sum_{X\in L}\frac{n-codim(X)}{2}}\exp\Big(-\sum_{X\in L}\frac{1}{2}|\mu(X)|\|X\|^2\Big)\prod_{I\in \boldsymbol{nbc}}A(I)^{-\frac{1}{2}},$$

$$c_i \;=\; \prod_{\substack{I\in \boldsymbol{nbc}_i\\(i,I)\in \boldsymbol{nbc}_i}}A(i\ I)/A(I)\prod_{\substack{J\in \boldsymbol{nbc}_i\\(i,J)\notin \boldsymbol{nbc}_i}}A\begin{pmatrix} iJ\\ 0J\end{pmatrix}/A(J).$$

ここで行列 A は $A=(a_{ij})_{\substack{0\leq i\leq m\\0\leq j\leq m}}$,$a_{00}=1$,, $a_{i0}=a_{0i}=u_{i0}$, $a_{ij}=(f_i,f_j)=\sum_{k=1}^{n}u_{ik}u_{jk}$, ($1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq m$) によって定義される行列であり、

$A\begin{pmatrix} i_1 \dots i_l \\ j_1 \dots j_l \end{pmatrix}$ は A の $i_1,\dots,i_l$ 行と $j_1,\dots,j_l$ 列による部分行列式である。$A\begin{pmatrix} i_1 \dots i_l \\ i_1 \dots i_l \end{pmatrix}$ は $A(i_i \dots i_l)$ と省略する。*Intersection lattice* の元 X に対して $\|X\|$ は原点から X への距離で、$\mu(X)$ は L 上の *Möbius function* で、$\boldsymbol{nbc}_i$ は H_i を $\mathscr{A}$ の最小の元とする順序において定まる $\boldsymbol{nbc}$ である。$\lambda_X = \sum_{X\subset H}\lambda_H$ で、$e(\mathbb{P}\mathscr{A}_X)$ は *projective quotient* $\mathbb{P}\mathscr{A}_X$ のオイラー標数とし、$\chi(\mathscr{A}^X,-1)$ は超平面配置 $\mathscr{A}$ を X に制限したときの部屋の個数とすると、$\alpha(X)$ は $\alpha(X) = |e(\mathbb{P}\mathscr{A}_X)\chi(\mathscr{A}^X,-1)|$ によって与えられる。

この論文の主定理は次の定理である。

定理 1. 上の予想 *2* は一般の位置にある超平面配置あるいは任意の 2 次元の配置に関して成り立つ。

この定理の結果として超平面配置が一般の位置にある場合あるいは 2 次元の場合には青本の予想が成り立つことが分かる。以下この主定理の証明のアウトラインを述べる。

一般の位置にある超平面配置の場合

Step 1. f_0 に新しいパラメーター t を導入し、$f_0 = -\frac{t}{2}(x_1^2+\cdots+x_n^2)$ とし、求める周期行列を $P(t,\lambda_i,u_{jk})$ とおく。まず t に関する微分方程式 $\frac{d}{dt}P = FP$ をもとめる。この F を用いるとこのとき $C(\lambda_i,u_{jk}) = \exp(-\int trFdt)\mathrm{Det}\,P(t,\lambda_i,u_{jk})$ は t には依存しない。

Step 2. $C(\lambda_i,u_{jk})$ がみたす差分方程式 $C(\lambda_1,\dots,\lambda_i+1,\dots,\lambda_m) = h(\lambda)C(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ をもとめる。ここで $h(\lambda)$ は λ の多項式である。

Step 3. $C(\lambda_i,u_{jkj}) = \exp(-\int trFdt)P(t,\lambda_i,u_{jk})$ を $t\to\infty$ での極限をとることにより計算する。P の各行に t のある関数を掛けることにより $t\to\infty$ とすることで P を上三角行列に変形することが出来る。従って $C(\lambda_i,u_{jk})$ の計算は L の各要素 X に対応する局所因子 q_X の積に帰着する。

Step 4. 局所因子 q_X の $\lambda\to\infty$ における漸近挙動を調べる。まず $t\to\infty$ における U の臨界点での f_i の値の近似値をもとめる。鞍点法を用いて局所因子 q_X が $\lambda\to\infty$ のとき $r_X = c_{X,0}\prod_{i=}^{m} c_{X,i}^{\lambda_i}(\Gamma - part)$ という形 ($\Gamma-\mathrm{part}$ は Γ 関数の積) の関数と漸近的に等しくなることをしめす。

Step 5. Step 4. により $C(\lambda_i,u_{jk}) = \prod_{X\in L} q_X$ と $\prod_{X\in L} r_X$ が同じ漸近挙動を持つことが分かり、さらに同じ差分方程式をみたすことをしめす。差分方程式の解の一意性によりこの両者は一致し、したがって Det P がもとまる。

2 次元の任意の超平面配置の場合

一般の位置にある配置と違うところは、点 X において l 本の直線が交わるときそれに対応する局所因子 Q_X が $(l-1)\times(l-1)$ 行列になることである。鞍点法より Det Q_X の漸近挙動が $c_{X,0}\prod_{i=1}^{m} c_{X,i}^{\lambda_i}(\Gamma-\mathrm{part})$ という形を持つことがわかるが、定数項 $c_{X,0}$ を直接計算することは難しい。そこで原点を通

る l 本の直線の配置に対する周期行列の行列式の計算をを一次元の超幾何関数の行列式の計算に帰着させ、$c_{X,0}$ を求める。これで $\mathrm{Det}\ Q_X$ の $\lambda \to \infty$ としたときの漸近挙動が求まり、従って $C(\lambda_i, u_{jk})$ の漸近挙動が求まる。差分方程式とあわせて $C(\lambda_i, u_{jk})$ が分かり、$P(t, \lambda_i, u_{jk})$ がもとまる。