論文審査の結果の要旨

氏名 新井　啓介

K を有限次代数体として，E を K 上の楕円曲線とする．素数 p に対し，E の Tate 加群 $T_pE = \varprojlim_n E[p^n]$ は，K の絶対 Galois 群 $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の表現 $\rho_{E,p} : G_K \to GL(T_pE) \simeq GL_2(\mathbb{Z}_p)$ を定める．Serre は，E が虚数乗法をもたなければ，Galois 表現 $\rho_{E,p}$ の像は $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ の開部分群であることを示した．Galois 表現 T_pE は，整数論の重要な対象として，多くの研究がなされてきた．本論文では，K と p を固定したとき，Galois 表現の像が E によらずに一様に大きいということを示し，次の結果を得た．

定理 1 K を代数体とし，p を素数とする．このとき，K, p のみに依存する定数 $n = n(K,p) \geq 1$ で，K 上定義された任意の楕円曲線 E に対し，E が虚数乗法をもたなければ，Galois 表現 $\rho_{E,p} : G_K \to GL_2(\mathbb{Z}_p)$ の像が $1 + p^n M_2(\mathbb{Z}_p) \subset GL_2(\mathbb{Z}_p)$ を含むようなものが存在する．

実際には，定理 1 より精密な次の結果が得られている．素数 p に対し，自然数 $n(p)$ を，$p \geq 23$ なら $n(p) = 0$，$p \geq 19, 17, 13, 11$ なら $n(p) = 1$，$p = 7$ なら $n(p) = 2$，$p = 5$ なら $n(p) = 3$，$p = 3$ なら $n(p) = 5$，$p = 2$ なら $n(p) = 11$ で定める．記号 $1 + p^0 M_2(\mathbb{Z}_p)$ は $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ を表わすものとする．

定理 2 p を素数とし，K を $\mathbb{Q}(\zeta_{p^{n(p)}})$ を含む代数体とする．このとき，K, p のみで定まる K の有限部分集合 $\Sigma = \Sigma_{K,p}$ で，K 上定義された任意の楕円曲線 E に対し，E の j 不変量 $j(E)$ が Σ の元でなければ，Galois 表現 $\rho_{E,p}$ の像が $(1 + p^{n(p)} M_2(\mathbb{Z}_p)) \cap SL_2(\mathbb{Z}_p)$ を含むようなものが存在する．

定理 1 は，定理 2 より容易にしたがう．定理 2 の証明の方針は次のとおりである．楕円曲線の同型類はモジュラー曲線の有理点を定めること，および，代数曲線の有理点の有限性に対する Mordell 予想が証明されていることにより，次の命題に帰着される．

命題 3 H を $SL_2(\mathbb{Z}/p^{n(p)+1}\mathbb{Z})$ の部分群で，$H \cap 1 + p^{n(p)} M_2(\mathbb{Z}) \subsetneq SL_2(\mathbb{Z}/p^{n(p)+1}\mathbb{Z}) \cap 1 + p^{n(p)} M_2(\mathbb{Z})$ をみたすものとする．このとき，モジュラー曲線 $X_H = H \backslash X(p^{n(p)+1})$ の種数 g_H は 2 以上である．

命題 3 の証明には，まず，種数公式により g_H を H に含まれるある種の共役類の元の個数として表わす．この共役類の個数の評価により，命題 3 が証明される．

Galois 表現 $\rho_{E,p}$ の像を，このように，楕円曲線の同型類をモジュラー曲線の有理点と考えて研究することは，これまでにいろいろな角度からなされてきた．しかし，本論文のような，モジュラー曲線の種数の評価から有限性を導く定性的な議論は，研究されて来なかったようである．$p \geq 7$ ならば，定理 2 の $n(p)$ は最良の評価を与えるが，$p \leq 5$ については改良されるべきものと考えられる．また，$p \leq 19$ のときは，定理 2 から派生する問題が種々あり，今後の研究の課題である．

以上のように，本論文では，代数体上の楕円曲線にともなう Galois 表現の像の下限について，新しい着想から興味深い結果を導いている．よって論文提出者 新井 啓介 は博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．