論文の内容の要旨

論文題目 Solutions of Continuous, Discrete and Ultradiscrete Soliton Equations

(連続，離散及び超離散ソリトン方程式の解)

氏　　名　　礒島　伸

1　有限領域でのソリトン解の挙動解析

ソリトンとは衝突しても壊れないという粒子的な性質を持った孤立波である．そのソリトンの相互作用を表す N ソリトン解と呼ばれる厳密解を持つ非線形方程式をソリトン方程式という．ソリトン方程式に関する近代的数学理論はクルスカルらによる逆散乱法，広田の双線形化法などを経て佐藤理論に至り，現在ではソリトン方程式について N ソリトン解の公式も含めて多くのことがわかっている．しかし個々のソリトン解の挙動については解を書き下して個別に調べるしかない．ソリトン解の挙動の研究は非線形現象を理解するために，またソリトンの物理的・工学的応用の可能性を模索する観点からも重要である．

第2章では coupled Kadomtsev-Petviashvili (cKP) 方程式

$$(4u_t - 6uu_x - u_{xxx})_x - 3u_{yy} + 24(v\hat{v})_{xx} = 0 \tag{1}$$

$$2\hat{v}_t + 3u\hat{v}_x + \hat{v}_{xxx} - 3\left(\hat{v}_{xy} + \hat{v}\int^x u_y dx\right) = 0 \tag{2}$$

$$2v_t + 3uv_x + v_{xxx} + 3\left(v_{xy} + v\int^x u_y dx\right) = 0 \tag{3}$$

のソリトン解の振る舞いに対する解析の結果を示す．cKP 方程式の N ソリトン解は，通常の KP 方程式など代表的なソリトン方程式の解よりも多くのパラメータを持ち，自由度が高いと言える．従って cKP 方程式のソリトン解はより複雑なソリトン相互作用のモデルとなることが期待される．このことを実証する一例として，cKP 方程式のソリトン解が有限な空間領域で網目状の構造を持ったパターンを描くことが報告されている (図 1).

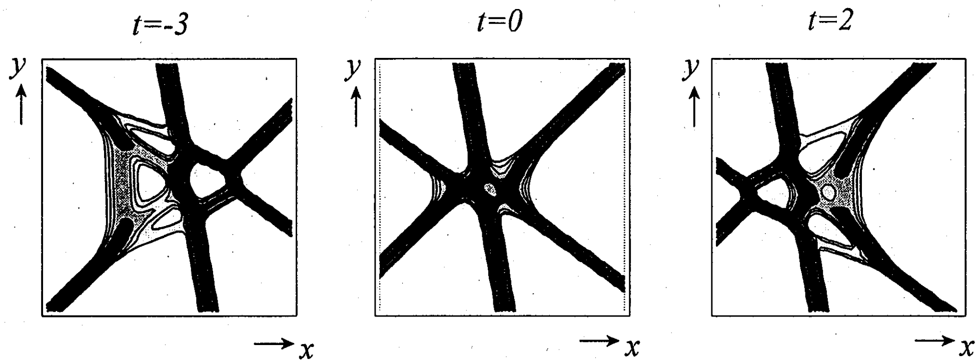

図 1: 網目状のパターンを描く cKP 方程式の 3 ソリトン解

しかし従来の無限遠領域の漸近挙動解析では有限領域での解の挙動を調べることはできない．そこで漸近挙動解析に改良を加えた，有限領域での解の挙動を解析的に調べる手法を提案する．この手法は cKP 方程式の解だけでなく一般のソリトン解に対して用いることができる．この手法によって，網目をなす波がソリトンでよく近似されることを示す．また，この手法は「ソリトン解に現れる位相のうち，どの位相がどういった領域で最大になるか」という問題に深く関わっている．この視点から，cKP 方程式の 2 ソリトン解はパラメータの選び方によっては 3 つのソリトンの相互作用を記述する場合があることが示される．

2　「超離散化における負の困難」の克服へ向けて

セルオートマトンとは有限個の状態をとるセルの列からなる離散力学系である．時間発展規則は単純であるにもかかわらず，セルオートマトンは一般に複雑な挙動を示す．この特徴に加えて計算機でのシミュレーションが容易なことから，自然現象あるいは社会現象のモデルとしてセルオートマトンを用いた研究がなされてきた．

高橋・薩摩はソリトン的な挙動を示すセルオートマトン，ソリトンセルオートマトンを提出した．その後，時弘・高橋・松木平・薩摩によってソリトンセルオートマトンと KdV 方程式などの連続系ソリトン方程式との直接の対応関係が明らかにされた．鍵となったのは超離散化と呼ばれる以下の手続きである．

1. パラメータ ε を含む適当な差分方程式を構成する．
2. 極限 $\varepsilon \downarrow 0$ をとり，区分線形関数で表される差分方程式を得る．この差分方程式の値域を離散値に制限し，セルオートマトンの時間発展ルールとみなす．

極限操作では次の恒等式が重要である．

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}) = \max(A, B) \tag{4}$$

超離散化の利点の 1 つは，もし差分方程式の解や保存量の極限が存在すればそれが対応するセルオートマトンの解や保存量となることである．よってソリトン方程式の超離散化によって得られるセルオートマトンは可積分系のよい数理構造を保ったものになる．また超離散化は系の可積分性とは無関係な手続きであり，交通流や数理病理学のモデルなど非可積分系の研究にも応用され始めている．

しかしながら，超離散化には「負の困難」と呼ばれる次のような問題点がある．超離散化を考える際に，差分系の従属変数に対して指数関数を用いた変数変換

$$u_n = e^{U_n/\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0 \tag{5}$$

を施すことによって系に ε 依存性を入れる，という手法が用いられる．だが，変換 (5) を施すためには差分系の従属変数 u_n^m は正でなければならない．また，恒等式 (4) の和を差に置き換えた場合，その意味のある極限は報告されていない．よって負値をとる変数あるいは減算を含む系を一般に超離散化することは困難である．このために超離散化の手続きを素直に適用できる系は限定され，ソリトン方程式ならば必ず超離散化できる，というわけではない．

本研究第３章の目的は，ソリトン方程式の超離散化において負の困難のため未解決である諸問題に一定の解答を与え，その研究を通して負の困難を克服する一般的な手続きの構成を試みることである．

第３章２節では sine-Gordon (SG) 方程式

$$\varphi_{xt} = \sin\varphi \tag{6}$$

のある超離散化を与える．SG 方程式は様々な応用を持つ有名なソリトン方程式の１つである．その超離散化の試みは既になされているものの，超離散系の解と差分系の解との直接の対応は論じられていなかった．本章で与える超離散系の特徴は，差分系のソリトン解と直接対応する解を持つことである．鍵になるのは差分 sinh-Gordon 方程式

$$\begin{aligned}
&2\delta^6 \sinh\left(\frac{\psi_{n+1}^{m+1} + \psi_{n-1}^{m-1} + \psi_{n+1}^{m-1} + \psi_{n-1}^{m+1}}{2}\right) \\
&\qquad + \delta^2\left(1+\delta^2\right)\left(2-\delta^2\right)\sinh\left(\frac{-\psi_{n+1}^{m+1} + \psi_{n-1}^{m-1} + \psi_{n+1}^{m-1} + \psi_{n-1}^{m+1}}{2}\right) \\
&\qquad + \delta^2\left(1+\delta^2\right)\left(2-\delta^2\right)\sinh\left(\frac{\psi_{n+1}^{m+1} - \psi_{n-1}^{m-1} + \psi_{n+1}^{m-1} + \psi_{n-1}^{m+1}}{2}\right) \\
&\qquad + \delta^2\left(1-\delta^2\right)\left(2+\delta^2\right)\sinh\left(\frac{\psi_{n+1}^{m+1} + \psi_{n-1}^{m-1} + \psi_{n+1}^{m-1} - \psi_{n-1}^{m+1}}{2}\right) \\
&\qquad + \delta^2\left(1-\delta^2\right)\left(2+\delta^2\right)\sinh\left(\frac{\psi_{n+1}^{m+1} + \psi_{n-1}^{m-1} - \psi_{n+1}^{m-1} + \psi_{n-1}^{m+1}}{2}\right) \\
&\qquad\qquad + 2\left(2-\delta^4\right)\sinh\left(\frac{-\psi_{n+1}^{m+1} - \psi_{n-1}^{m-1} + \psi_{n+1}^{m-1} + \psi_{n-1}^{m+1}}{2}\right) = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

の従属変数 ψ_n^m に対して

$$\psi_n^m = \log\left(1 - \frac{2}{\delta^2}\frac{u_n^m - 1}{u_n^m + 1}\right) \tag{8}$$

で定義される従属変数 u_n^m を導入することである．この u_n^m は超離散化に適した変数であり，その超離散化によって超離散 SG 方程式とその解を得る．

第３章３節では負値変数を超離散化するための一般的な手続きとして sinh 関数を用いた変数変換

$$u_n = \sinh\left(\frac{U_n}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0 \tag{9}$$

を施すことを提案する．具体例として離散 mKdV 方程式のソリトン解にこの手法を適用し，得られた極限関数が mKdV 方程式の解の特徴である正のソリトンと負のソリトンとの相互作用をよく再現していることを示す．

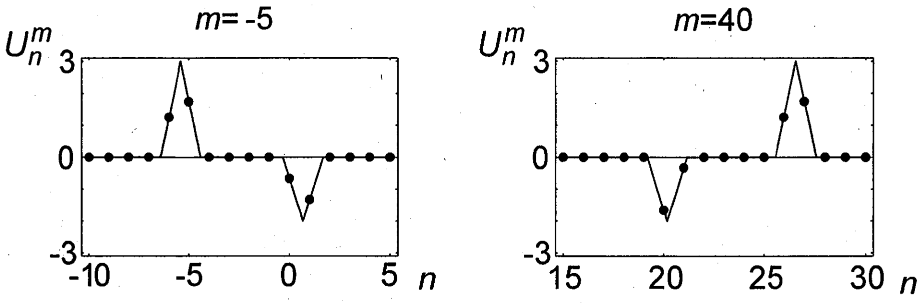

図 2: 超離散 mKdV 方程式の 2 ソリトン解．左図が相互作用前 (時刻 $m=-5$)，右図が相互作用後 ($m=40$) を表す．相互作用の前後でそれぞれの波が個性を保っている．

3 まとめ

連続ソリトン解の有限領域での挙動を解析する手法を提案した．この手法を用いて cKP 方程式のソリトン解を解析し，網目状のパターンが現れる仕組みを明らかにした．

SG 方程式のある超離散類似を与え，その解と離散 SG 方程式のソリトン解との対応を示した．また，sinh 関数を用いて負値変数を超離散化する手法を提案し，その手法を mKdV 方程式に適用して正と負のソリトン同士の相互作用現象をよく再現する解を得た．