論文審査の結果の要旨

氏　名　　礒島　伸

本論文提出者は二つの問題を扱っている。一つはcoupled Kadomtsev-Petviashvili (cKP) 方程式のソリトン解の挙動に関するもので、もう一つはソリトン方程式の超離散化として得られるセルオートマトンに関するものである。

ソリトンとは衝突しても壊れないという粒子的な性質を持った孤立波であり、ソリトンの相互作用を表すNソリトン解と呼ばれる厳密解を持つ非線形方程式をソリトン方程式という。ソリトン方程式に関する近代的数学理論は逆散乱法，双線形化法などを経て佐藤理論に至り，現在ではソリトン方程式についてNソリトン解の公式も含めて多くのことがわかっている。しかし個々のソリトン解の挙動については解を書き下して個別に調べるしかない。ソリトン解の挙動の研究は非線形現象を理解するために，またソリトンの物理的・工学的応用の可能性を模索する観点からも重要である。

セルオートマトンとは有限個の状態をとるセルの列からなる離散力学系である。時間発展規則は単純であるにもかかわらず、セルオートマトンは一般に複雑な挙動を示す。この特徴に加えて計算機でのシミュレーションが容易なことから、自然現象あるいは社会現象のモデルとしてセルオートマトンを用いた研究がなされてきた。高橋・薩摩はソリトン的な挙動を示すセルオートマトン，ソリトンセルオートマトンを提出した。その後，時弘・高橋・松木平・薩摩によってソリトンセルオートマトンとKdV方程式などの連続系ソリトン方程式との直接の対応関係が明らかにされた。鍵となったのは超離散化と呼ばれる手続きである。

超離散化の利点の１つは，もし差分方程式の解や保存量の極限が存在すれば、それが対応するセルオートマトンの解や保存量となることである。よってソリトン方程式の超離散化によって得られるセルオートマトンは可積分系のよい数理構造を保ったものになる。しかしながら、超離散化には「負の困難」と呼ばれる問題点がある。すなわち、超離散化を考える際、差分系の従属変数は正でなければならない。また、式の和を差に置き換えた場合、その意味のある極限は報告されていない。よって負値をとる変数あるいは減算を含む系を一般に超離散化することは困難である。このために超離散化の手続きを素直に適用できる系は限定され、ソリトン方程式ならば必ず超離散化できるというわけではない。

本論文ではまず第２章でcKP方程式のソリトン解が有限な空間領域で網目状の構造を持ったパターンを描くことを報告した後、漸近挙動解析に改良を加え、有限領域での解の挙動を解析的に調べる手法を提案している。さらに、この手法を用いて、網目をなす波がソリトンでよく近似されることを示している。また、この手法は「ソリトン解に現れる位相のうち，どの位相がどういった領域で最大になるか」という問題に深く関わっているとの視点から、cKP方程式の２ソリトン解はパラメータの選び方によっては３つのソリトンの相互作用を記述する場合があることを示している。

次に第３章で、ソリトン方程式の超離散化において負の困難のため未解決である諸問題に一定の解答を与え，その研究を通して負の困難を克服する一般的な手続きの構成を試みている。すなわち、代表的なソリトン方程式であるサインゴルドン方程式について、新しい変数を導入することにより、超離散方程式とその解を得ている。また負値変数を超離散化するための一般的な手続きとしてsinh関数を用いた変数変換を提案し、具体例として離散mKdV方程式のソリトン解にこの手法を適用し，得られた極限関数がmKdV方程式の解の特徴である正のソリトンと負のソリトンとの相互作用をよく再現していることを示している。

以上、本論文は連続ソリトン解の有限領域での挙動を解析する手法を提案するとともに、その手法を用いてcKP方程式のソリトン解を解析し，網目状のパターンが現れる仕組みを明らかにしている。また、サインゴルドン方程式のある超離散類似を与え，その解と離散サインゴルドン方程式のソリトン解との対応を示している。また、sinh関数を用いて負値変数を超離散化する手法を提案し，その手法をmKdV方程式に適用して正と負のソリトン同士の相互作用現象をよく再現する解を得ている。本論文の成果は離散問題と連続問題を繋ぐという研究に新しい光を当てるものであり、そこで用いられている方法は数理科学的方法論の一つの方向性を示唆するものと考えられる。

よって論文提出者 礒島伸 は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。