論文の内容の要旨

Defining equations of the universal abelian surfaces with level three structure

(レベル 3 構造を持つ普遍的アーベル曲面の定義方程式)

氏名　軍司圭一

よく知られているように，射影空間 $\mathbb{P}^2$ における Hesse の 3 次曲線

$$E : X^3 + Y^3 + Z^3 = 3\mu XYZ$$

は $\mu \neq \infty, 1, \omega, \omega^2$ $(\omega = e^{2\pi i/3})$ であるときにレベル 3 構造を持つ楕円曲線の式を与える．一方で複素上半空間の元 τ をとり，$E = \mathbb{C}/(\tau\mathbb{Z} + \mathbb{Z})$ という表示を与えると，上式の係数 μ は τ の関数として，保形関数を使って表わされる．実際，

$$\vartheta(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^2} \exp \pi i (\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} [l]\tau),$$

$$\chi(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^2} \exp \pi i (\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} [l + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}])$$

と定義すれば $(X[Y] := {}^tYXY$ とかく)，$\mu = \vartheta/\chi$ が成り立つ．ここで $\vartheta, \chi \in M_1(\Gamma(3))$, ただし $M_k(\Gamma(3))$ をレベル 3 の主合同部分群に関する重さ k の保型形式の生成する空間とする．さらに

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} M_k(\Gamma(3)) = \mathbb{C}[\vartheta, \chi]$$

となり，これより $X(3)$ をレベル 3 の modular curve とすれば，その関数体が $\mathbb{C}(X(3)) = \mathbb{C}(\mu)$ となることも分かる．

この論文では，上の有名な事実のアーベル曲面への拡張を考えた．すなわち問題になるのは次の 2 点である．

(1) アーベル曲面の射影空間の中での定義方程式を書き下すこと.

(2) 係数を Siegel modular form としてとらえること.

これに対する結果は以下のようになる．まず，Hesse 3 次曲線の拡張として

定理 (Theorem 8.3) アーベル曲面 $\mathbb{C}^2/(\tau\mathbb{Z}^2+\mathbb{Z}^2)$ の定義方程式は $\mathbb{P}^8$ の中で，2 次式 9 つ，3 次式 3 つの計 12 本の式で与えられる.

ここで τ は Siegel 上半空間 $\mathbb{H}_2=\{Z\in M_2(\mathbb{C})\mid {}^tZ=Z,\ \mathrm{Im}\,Z\gg 0\}$ の元である.
次に保形関数 μ の拡張として

定理 (Theorem 3.2, Theorem 7.3) 上記の定理に現れる係数は，τ の関数としてすべて次数 2，レベル 3 の主合同部分群に関する次数が高々2 の指標付の保型形式である.

以下，この二つの定理の証明の概要及び，各節ごとの内容を簡単に紹介する．今 $A=\mathbb{C}^2/(\tau\mathbb{Z}^2+\mathbb{Z}^2)$ を主偏極を持つアーベル曲面とし，L_0 をその主偏極を与える直線束，$L=L_0^3$ とする．このときアーベル曲面を L によって射影空間 $\mathbb{P}(H^0(A,L))$ に埋め込んだときのの定義方程式は，以下の写像の核を計算することによって得られる.

$$\varphi:\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathrm{Sym}^n H^0(A,L)\longrightarrow\bigoplus_{n=0}^{\infty}H^0(A,L^n).$$

$\varphi_n:\mathrm{Sym}^n H^0(A,L)\to H^0(A,L^n)$ とかくことにする．すでに Mumford ([M1, M2]) や Sekiguchi [S] 等の結果により，$L=L_0^3$ である場合に $\ker\varphi$ は 2 次および 3 次の元で生成されることが知られている．さらにそのうちの 3 次式については，Birkenhake および Lange によって $\ker\varphi_3$ の生成元が与えられている ([BL])．しかしながら最小の生成系，すなわち $\ker\varphi_3$ の基底が与えられているわけではなく，またその生成系から自明でない元を取り出すことは易しくない.

本論文では，まず §1 において Birkenhake-Lange の定理の復習をした後，§2 において $\ker\varphi_3$ の生成元が二次形式のテータ関数で与えられており，よって保型形式となることを見る．しかし二次形式のテータ関数の理論によると，この保型形式は $M_1(\Gamma^2(36))$ という非常に大きな空間に属しているということまでしか，直ちには分からない.

§3 において我々は 3 次の関係式のうち，最も重要となる 4 つの式を具体的に与え，更にその係数が $M_1(\Gamma^2(3))$ に属していることを，既に与えられたレベル 3 の保型形式の元と比較することによって証明する．更に §4 で 84 個すべての 3 次式の基底のリストを与えた後，§5 においてその係数が指標付のレベル 3 の保型形式となっていることを証明する．この際ポイントになるのは，群 $\Gamma^2(3)/\Gamma^2(36)$ の生成元を具体的に，二次形式のテータ関数の理論を適用しやすい形で与えることである.

§7 においては 2 次の関係式について考察する．Mumford はレベルが偶数の場合，すなわち主偏極を与える直線束 L_0 の偶数乗で射影空間に埋め込んだ場合の 2 次の関係式についての生成系を与えているが ([M1, M2])，レベルが奇数の場合の 2 次式については，これまであまり考察されてこなかったように思われる．しかしながら，写像 φ_2 を適当な基底を取って表現することができるので，$\ker\varphi_2$ の元を具体的に表示することは可能である．そしてその係数を τ の関数と見なした場合，再び二次形式のテータ関数の理論からこれがレベル 12 の保型形式となることもすぐに分かる．これがレベル 3 の指標付の保型形式であることを示すのが，本論文の中で技術的にもっとも面白い点である.

最後に §8 において，§7 で得られた 9 つの 2 次式を使って，§4 で与えた 84 個の 3 次式のリストのうち，不要なものを消去する作業を行う．ここで本質的な役割を果たすのが Freitag 及び Salvati Manni によって示された次数環 $\bigoplus_{k=0}^{\infty} M_k(\Gamma^2(3))$ の環構造である ([FS])．すなわち定義方程式の係数として与えられた保型形式を既知の関数を使って書き直すことにより，各係数の間の関係式が分かるのである．筆者も参考論文 ([G]) によって，この環の生成元やそれらの元の性質について考察しており，この計算の際には大いに役に立った．そして最終的には 12 本という比較的少ない数の方程式系で，しかも非常に対称性の高い定義方程式を得ることができるのである．

参考文献

[A] A. N. Andrianov, "Quadratic forms and Hecke operators", Glundl. math. Wiss. 286, Springer-Verlag, 1987

[Ba] W. Barth, "Quadratic equations for level-3 abelian surfaces" Abelian varieties (Egloffstein, 1993), 1-18, de Gruyter, Berlin, 1995

[BL] Ch. Birkenhake, H. Lange, "Cubic theta relations", J. reine. angew. Math., **407**(1990), 167-177.

[FS] E. Freitag, R. Salvati Manni "The Burkhardt Group and Modular Forms", Manuskripte der Forschergruppe Arithmetik Mannheim-Heidelberg, Nr. **6**(2002), 1-24.

[G] K. Gunji, "On the graded ring of Siegel modular forms of degree 2, level 3", J. Math. Soc. Japan, **56**(2004), no. 2, 375-403.

[Ke] G. Kempf, "Projective coordinate rings of abelian varieties" in: Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory. Edited by J. Igusa. 225-236 The John Hopkins Press (1989)

[Kl] H. Klingen, "Introductory lectures on Siegel modular forms", Cambridge Std. in Adv. Math. 20, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990

[Ko1] S. Koizumi, "Theta relations and projective normality of abelian varieties", Am. J. Math., **98**(1976) 865-889.

[Ko2] S. Koizumi, "The equations defining abelian varieties and modular functions" Math. Ann., **242**(1979) 127-145.

[LB] H. Lange, Ch. Birkenhake, "Complex Abelian Varieties", Glundl. Math. Wiss., **302**, Springer-Verlag, 1992.

[M1] D. Mumford "On the equations defining abelian varieties I", Invent. Math., **1**(1967) 287-354.

[M2] D. Mumford "Varieties defined by quadratic equations" Questions on Algebraic Varieties (C.I.M.E., III Ciclo, Varenna, 1969) Edizioni Cremonese, Rome(1970) 29–100.

[S] T. Sekiguchi "On the cubics defining abelian varieties", J. Math. Soc. Japan, **30**(1978), NO.4 701-721.