論文審査の結果の要旨

氏　名　軍　司　圭　一

論文題目：Defining equations of universal abelian surfaces with level three structure

（レベル3構造を持つ普遍的アーベル曲面の定義方程式）

楕円曲線の古典的な定義式の一つである，射影空間 $\mathbb{P}^2$ における Hesse の3次曲線

$$E : X^3 + Y^3 + Z^3 = 3\mu XYZ \quad (\mu \neq \infty, 1, \omega, \omega^2 \ (\omega = e^{2\pi i/3})$$

は，レベル3構造を持つ楕円曲線の普遍的な定義式を与える．特に係数 μ はモジュラー関数となる．即ち複素上半平面の点 τ をとり，楕円曲線の複素トーラスとして表示 $E = \mathbb{C}/(\tau\mathbb{Z}+\mathbb{Z})$ を与えると，上式の係数 μ の τ の保形関数としては，二つの重さ1でレベル3の楕円モジュラー形式

$$\vartheta(\tau) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^2} \exp \pi i(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} [l]\tau), \qquad \chi(\tau) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^2} \exp \pi i(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} [l + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}])$$

によって（ここでは $X[Y] := {}^tYXY$ と書く），商 $\mu = \vartheta/\chi$ として表わされる．さらに一般に $M_k(\Gamma(3))$ をレベル3の主合同部分群に関する重さ k の保型形式の生成する空間とするとき，$\bigoplus_{k=0}^{\infty} M_k(\Gamma(3)) = \mathbb{C}[\vartheta, \chi]$ となり，これより $X(3)$ をレベル3の modular curve とすれば，その関数体が $\mathbb{C}(X(3)) = \mathbb{C}(\mu)$ となることも知られている．この論文では，この良く知られた古典的な事実の，アーベル曲面への拡張を考えた．

つまり問題は次の二つある．

(1) アーベル曲面の射影空間の中での定義方程式を明示的に書き下す．

(2) その係数を Siegel modular form として意味付ける．

本論文はこれに完全に成功し，これが即ち当論文の主たる結果である．

先ず Hesse 3次曲線の拡張として次を得る．

定理 （問題（1）へ答） アーベル曲面 $\mathbb{C}^2/(\tau\mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2)$ の定義方程式は $\mathbb{P}^8$ の中で，2次式9つ，3次式3つの計12本の式で与えられる．

ここで τ は種数2の Siegel 上半空間 $\mathbb{H}_2 = \{Z \in M_2(\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z, \ \mathrm{Im}\, Z \gg 0\}$ の元である．

次に保形関数 μ の拡張としては以下の結果が得られる．

定理 (問題 (2) への答) 上記の定理に現れる係数は，τ の関数としてすべて次数 2，レベル 3 の主合同部分群に関する次数が高々2 の指標付の保型形式であり、テータ級数によって具体的表示できる．

以下，この二つの定理の証明の概要及び，研究史上の意義を述べる．

$A = \mathbb{C}^2/(\tau\mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2)$ を主偏極を持つアーベル曲面とし，L_0 をその主偏極を与える直線束，$L = L_0^3$ とする．このときアーベル曲面を L によって射影空間 $\mathbb{P}(H^0(A, L))$ に埋め込んだときのの定義方程式系を与えることは，以下の標準写像の核の生成系を具体的に計算することに他ならない．

$$\varphi : \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Sym}^n H^0(A, L) \longrightarrow \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(A, L^n).$$

各 n に対して上の標準写像の n 次部分を $\varphi_n : \mathrm{Sym}^n H^0(A, L) \to H^0(A, L^n)$ とかくことにする．既に David Mumford (６０年代) や関口宏（７０年代) 等の結果により，$L = L_0^3$ である場合に $\ker\varphi$ は 2 次および 3 次の元で生成されることが知られている．さらにそのうちの 3 次式については，９０年代の Birkenhake および Lange の研究によって $\ker\varphi_3$ の生成元が与えられている．しかしながら彼らの生成系には不要なものが数多く含まれていて，$\ker\varphi_3$ の基底を与えていない．その生成系から自明でない元を取り出し，3 次の関係式の線形空間の基底を見出すことは，決して容易ではない．

本論文では，まず §1 において Birkenhake-Lange の結果を概観した後，§2 において $\ker\varphi_3$ の生成元が二次形式のテータ関数で与えられており，よって保型形式となることを見る．しかしながら，二次形式のテータ関数の一般論のみでは，この保型形式は $M_1(\Gamma^2(36))$ という高いレベルの保型形式の次元の非常に大きな空間に属しているということまでしか，直ちには分からない．当論文の §3 において 3 次の関係式のうち，最も重要となる 4 つの式を具体的に与え，更にその係数が $M_1(\Gamma^2(3))$ に属していることを，既に知られているレベル 3 の保型形式の元と比較することによって証明する．ここで著者は、著者自身の以前の研究成果を利用している．更に §4 で 84 個すべての 3 次関係式の基底のリストを与えた後，§5 においてその係数が指標付のレベル 3 の保型形式となっていることを証明する．

§7 においては 2 次の関係式について論じる．既に Mumford は レベルが偶数の場合，すなわち主偏極を与える直線束 L_0 の偶数乗で射影空間に埋め込んだ場合の 2 次の関係式についての生成系を与えている．しかし，レベルが奇数の場合の 2 次式については，これまであまり考察されていない．ここでは，写像 φ_2 を適当な基底を取って表現し，$\ker\varphi_2$ の元を具体的に表示する．そしてその係数を τ の関数と見なした場合，再び二次形式のテータ関数との比較から、これがレベル 12 の保型形式となることを見る．最後に §8 において，§7 で得られた 9 つの 2 次式を使って，§4 で与えた 84 個の 3 次式のリストのうち，不要なものを消去する．ここでは，Freitag 及び Salvati Manni によって示された次数環 $\bigoplus_{k=0}^{\infty} M_k(\Gamma^2(3))$ の環構造を用いる（未出版）．すなわち定義方程式の係数として与えられた保型形式を，既知の関数を使って書き直すことにより，各係数の間の関係式が導出される．

さてレベル 3 種数 2 の Siegel モジュラー多様体に関しては 100 年以上も前に，Burkhardt による研究がある．古典的な時代から関心を持たれたこの種の問題は，整数論や代数幾何学の研究者の強い興味や関心を呼び起こした．謂わば,「実例の計算」であるこの種の結果は，我々の研究手法の適切さや深さを測る大切な指標ともなる．多くの分野の手法を駆使し（多変数保型形式論，アーベル多様体論，有限群の表現論），非常に対称性の高い美しい定義方程式系を明示的に得るという深い結果に当達した当論文の結果は，著者の他分野に渉る数学的な力量を証明し，多くの人から賞賛されるに値する．

よって，論文提出者　軍司圭一は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．