論文の内容の要旨

論文題目
Pseudo-effectivity and Effective Non-vanishing
(擬有効性と有効な非消滅)

氏名　　　謝　啓鴻

チャーン類は複素多様体または代数多様体に対して極めて重要な特性類の1つである。例えば、複素多様体におけるベクトル束のチャーン類は大域的枠が存在する障害であって、代数多様体のチャーン類とリーマン・ロッホ定理は固く関連づけられていると知られている。

チャーン類の研究について、いろいろな手段がある。ベクトル束に強い条件を加えて、そのチャーン類に良い性質をもたせるのは1つの方法である。例えば、豊富なベクトル束のチャーン類はすべてある意味で正になる ([BG71] 参照)。もう1つは、第1チャーン類が適当な条件を満たすとき、高次元チャーン類が強く制限されることを用いる方法である。この方法に関する重要な例は次の宮岡の定理である ([Mi87] 参照)。

定理 1. X を n 次元極小射影的代数多様体とする。つまり、X が高々末端特異点をもって、標準因子 K_X がネフである。任意の X 上の豊富なカルティエ因子 $H_1, \cdots, H_{n-2}$ に対して、次の不等式が成立する。

$$\big(3c_2(X) - c_1^2(X)\big).H_1 \ldots H_{n-2} \geq 0$$

特に、X は3次元極小射影的代数多様体であるとき、第2チャーン類 $c_2(X)$ が 1-サイクルとして擬有効になる。つまり、$c_2(X)$ の数値的同値類がクライマン・森錐 $\overline{NE}(X)$ に含まれている。

この結果によって、3 次元極小射影的代数多様体に対して、小平次元が非負であって、アバンダンス予想が成り立つことは広く知られている。

本論文では、次の予想を考えている。

予想 2. X を高々末端特異点をもつ 3 次元射影的多様体とする。反標準因子 $-K_X$ がネフであるとき、第 2 チャーン類 $c_2(X)$ が擬有効になる。

この予想について、次の結果が示されていた ([Mi87, KMM04, KMMT00] 参照)。

定義 3. X を正規完備な代数多様体とし、D を X 上のネフな $\mathbb{Q}$-カルティエ因子とする。D の数値的次元は $\nu(D) := \max\{\nu \in \mathbb{N} \cup \{0\} | D^\nu \not\equiv 0\}$ で定義される。

定理 4. 仮定は予想 2 と同じ。数値的次元 $\nu(-K_X) \neq 2$ のとき、$c_2(X)$ が擬有効になる。$\nu(-K_X) = 2$ のとき、$c_1(X).c_2(X) \geq 0$ および不正則数 $q(X) \leq 1$ が成立する。

予想 2 を証明するために、$\nu(-K_X) = 2$ だけで考えれば十分である。しかし、定理 4 の証明に用いられた方法は $\nu(-K_X) = 2$ の場合へ拡張することができないので、新しい考え方が絶対に必要であると思われる。本論文では、極小モデル・プログラムを用いて、$\nu(-K_X) = 2$ の場合を議論している。

次の概念は主定理のキーポイントとして非常に重要である。

定義 5. $\mathbb{R}_+[l]$ を $\overline{NE}(X)$ の端射線とし、$f : X \to Y$ を対応する端収縮写像とする。f が良いとは、ある非負整数 n が存在して、$c_2(X) + nl$ が擬有効になることである。

主要なアイディア

仮定は予想 2 と同じ。さらに、X が $\mathbb{Q}$-分解的と仮定する。$\overline{NE}(X)$ に対応する X のすべての端収縮写像を考える。

(1) すべての端収縮写像は良い (2) $c_1(X).c_2(X) \geq 0$	$\Longrightarrow$	$c_2(X)$ が 擬有効になる

まず、$\nu(-K_X) = 2$ で滑らかな場合を考えて、次の定理を得る。

定理 6. X を滑らかな射影的3次元多様体とする。$-K_X$ がネフかつ $\nu(-K_X)=2$ と仮定する。

(1) $q(X)=1$ のとき、$c_2(X)$ が擬有効になる。

(2) $q(X)=0$ のとき、$c_2(X)$ が擬有効になることと次の仮説 ($\mathrm{AD_{III}}$) が成り立つこととは同値である。

仮説 ($\mathrm{AD_{III}}$). 仮定は定理 6(2) と同じ。$\mathbb{R}_+[l]$ を端射線とし、対応する端収縮写像 $f: X \to Y$ は因子 E を曲線 C へつぶすとする。さらに、次のいずれかが成り立つと仮定する。

(A) $C \cong \mathbb{P}^1$ かつ $\mathcal{N}_{C|Y} \cong \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2)$

(B) $C \cong \mathbb{P}^1$ かつ $\mathcal{N}_{C|Y} \cong \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-2)$

このとき、ある正整数 n が存在して、$c_2(X)+nl$ が擬有効になる。

上の主要なアイディアを用いて、滑らかな場合の証明は末端特異点をもつ場合に伸ばすことができる。末端特異点をもつ場合にフリップが出てくるのは1つの難しいところである。また極小モデル・プログラムをするとき、末端特異点の範囲をおさえるのが一般的に難しくなっている。

定義 7. X を $\mathbb{Q}$-分解的末端特異点をもつ3次元射影的多様体とする。集合 $\mathcal{A}(X)$ は次のように定義される。$\mathcal{A}(X)$ の元 Y は3次元多様体であって、X から Y への次のようないくつかの双有理写像の合成がある。

$$X = X_0 \dashrightarrow X_1 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_r = Y$$

ただし、$\dashrightarrow$ は因子収縮写像またはフリップである。

次は本論文の主定理である。

定理 8. X を末端特異点をもつ3次元射影的多様体とする。$-K_X$ がネフかつ $\nu(-K_X)=2$ と仮定する。

(1) $q(X)=1$ のとき、$c_2(X)$ が擬有効になる。

(2) $q(X)=0$ および $\mathcal{A}(X^{\mathbb{Q}})$ のすべての元 Y に対して $c_1(Y).c_2(Y) \geq 0$ が成り立つと仮定する。ただし、$\mu: X^{\mathbb{Q}} \to X$ は X の1つの $\mathbb{Q}$-分解化である。このとき、$c_2(X)$ が擬有効になる。

一般的に、第2チャーン類の擬有効性を証明するために、接層または余接層のある半安定性或いは半正値性が示されるのが必要であると思われる。本論文では、この問題に対して、極小モデル・プログラムという

手段で議論するのははじめてである。この議論について、今後の発展が期待されている。

主定理の応用として、Ambroと川又による次の有効な非消滅の予想を考える([Am99, Ka00] 参照)。

予想 9. X を正規完備な代数多様体とし、B を X 上の有効な $\mathbb{R}$-因子とする。ただし、(X, B) は川又対数的末端特異点をもつ。D を X 上のネフなカルティエ因子とする。$D-(K_X+B)$ がネフかつ巨大であると仮定する。このとき、$H^0(X, D) \neq 0$ が成立する。

この予想について、次の結果が知られている。

注意 10. (1) 川又・フィーベックの消滅の定理によって、$H^0(X, D) \neq 0$ は $\chi(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$ と同値である。

(2) 曲線の場合、有効な非消滅はリーマン・ロッホの定理から従った。曲面の場合、この予想は川又によって半正値性の定理で示された([Ka00] 参照)。高次元の場合、この予想は未解決である。

(3) X がトーリック多様体であるとき、任意のネフなカルティエ因子が固定点自由であることによって、この予想は自明である([Mu02] 参照)。

次の定義から、3次元の有効な非消滅の予想が成り立つための1つの十分条件が与えられる。

定義 11. X を末端特異点をもつ3次元多様体とする。X が rE-条件を満たすとは、ある実数 r が存在して、$c_2(X) - rc_1^2(X)$ が擬有効になることである。

命題 12. X を末端特異点をもつ3次元多様体とし、X が rE-条件を満たすと仮定する。ただし、$0 \leq r \leq 1$ とする。D を X 上のネフなカルティエ因子とする。$D - K_X$ がネフかつ巨大であると仮定する。このとき、$H^0(X, D) \neq 0$ が成立する。

第2チャーン類の擬有効性によって、次のいくつかの系を得る。

系 13. X を標準特異点をもつ極小3次元射影的多様体とする。このとき、X 上の有効な非消滅が成立する。

系 14. X を標準特異点をもつ3次元射影的多様体とする。$-K_X$ がネフであると仮定する。さらに、次のいずれかが成り立つとする。

(1) $\nu(-K_X) \neq 2$

(2) $\nu(-K_X) = 2$ かつ $q(X) = 1$

このとき、X 上の有効な非消滅が成立する。

系 15. Y を滑らかな極小3次元射影的多様体または滑らかな3次元ファノ多様体とする。$f : X \to Y$ をいくつかの点を中心とするブローアップまたはエタール写像の合成とする。このとき、X 上の有効な非消滅が成立する。

次の定理は、有効な非消滅の予想が特異点に関して一般化できることを示している。

定理 16. X を正規射影的 n 次元多様体とし、B と B^o を X 上の有効な $\mathbb{Q}$-因子とする。ただし、$B^o \leq B$、(X, B^o) が川又対数的末端特異点をもって、(X, B) が固有対数的標準特異点をもつ。D を X 上のネフなカルティエ因子とする。$D - (K_X + B)$ が豊富であると仮定する。次元が n より小さなとき、予想9が成り立つと仮定すると、$H^0(X, D) \neq 0$ が成立する。

謝辞. この論文を書くにあたって、修士課程に進学して以来多くの数学の示唆、激励を下さった川又雄二郎先生には深く感謝しております。また、川又セミナーの先輩として様々な面で私を励まして下さった小木曽啓示先生、高木寛通先生、上原北斗さん、川北真之さんには大変感謝しております。最後に、この論文について有益な議論を交わした Ambro Florin さん、安田健彦さん、永井保成さん、齋藤夏雄さん、高木俊輔さんにこの場を借りて感謝致します。

参考文献

[Am99] F. Ambro, Ladders on Fano varieties, *Algebraic geometry, 9. J. Math. Sci.*, **94**(1999), 1126–1135.

[BG71] S. Bloch, D. Gieseker, The positivity of the Chern classes of an ample vector bundle, *Invent. Math.*, **12**(1971), 112–117.

[Ka00] Y. Kawamata, On effective non-vanishing and base-point-freeness, *Asian J. Math.*, **4**(2000), 173–182.

[KMM04] S. Keel, K. Matsuki, J. McKernan, Corrections to "log abundance theorem for threefolds", *Duke Math. J.*, **122**(2004), 625–630.

[KMMT00] J. Kollár, Y. Miyaoka, S. Mori, H. Takagi, Boundedness of canonical $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **76**(2000), 73–77.

[Mi87] Y. Miyaoka, The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety, Alg. Geom., Sendai, 1985, *Adv. Stud. Pure Math.*, **10**(1987), 449–476.

[Mu02] M. Mustaţă, Vanishing theorems on toric varieties, *Tôhoku Math. J.*, **54**(2002), 451–470.