論文審査の結果の要旨

氏 名 謝 啓鴻

論文提出者 謝啓鴻 は, 3 次元代数多様体の第二 Chern 類が擬有効になるための条件を研究した. 結果として, 末端特異点を持った 3 次元代数多様体において, 反標準因子が nef になる場合には, ある種の補助的な仮定の下に, 第二 Chern 類が擬有効になることを証明した. そしてその応用として, 有効な非消滅に関する予想に対して部分的に肯定的な解答を得た.

代数多様体の Chern 類は, その多様体の本質的な性質をよく記述する不変量であることが知られている. 代数曲面に対しては, c_1^3 が $3c_2$ で抑えられるという, 有名な宮岡-Yau の不等式が知られている. この不等式は強力であり, c_1^3 と c_2 の比は代数曲面の構造をよく反映している.

一方, 高次元の代数多様体においては, 極小モデルの理論が基本であり, 従って特異点を許す多様体も同時に扱うことが重要になる. これらの特異点は, 末端特異点とか対数的末端特異点とか呼ばれるものであって, 特殊ではあるが重要な特異点である.

高次元においても, 代数多様体が有理曲線の族で覆われない場合には, c_1^2 と c_2 の関係が宮岡洋一氏によって証明されており, 特に 3 次元の場合において, いわゆる abundance 予想の解決のための重要なステップになった. Chern 類の性質は, 接束の安定性と深く関係しており, その重要性はまだくみ尽くされてはいない.

謝氏は, このような背景の下に, 末端特異点を持つような 3 次元の代数的多様体の第二 Chern 類について研究した. 宮岡氏の結果を踏まえれば, 代数多様体が有理曲線の族で覆われる場合が重要である. 標準因子が nef になるような代数多様体が極小モデルであり, この場合には有理曲線の族で覆われることはない. そこで, 謝氏は, 反標準因子が nef である場合を考えることにし, この場合には第二 Chern 類 c_2 が擬有効であろうと予想した. ただし, 擬有効というのは, その数値的同値類が, 有効な $\mathbb{Q}$ 係数 1 サイクルの極限になっているということである.

次元が 3 であるので, 反標準因子の数値的小平次元は 0, 1, 2, 3 の 4 とおりの値をとりうる. Keel-松木-McKernan や Kollár-宮岡-森-高木の結果によれば, 数値的小平次元が 2 の場合を除けば, c_2 が擬有効であることが

わかる．そこで謝氏は数値的小平次元が 2 の場合を考えたわけだが，その方法として極小モデル・プログラムを使うことにした．極小モデル・プログラムは，標準因子が nef ではないような代数多様体を与えると，自動的に双有理変換を引き起こすもので，この操作を追跡していけば多様体の構造に迫ることができる．この双有理変換は，因子収縮写像かまたは flip と呼ばれるものになるが，これらの場合における Chern 類の変化を詳しく分類することによって，謝氏は，いくつかの例外を除いて，c_2 が擬有効であることを証明した．

謝氏は，この結果を，有効な非消滅予想へ応用した．極小モデル理論の基本定理の一つある固定点自由化定理は，以下のことを主張する：それ自身 nef である Cartier 因子は，標準因子を引くと nef かつ巨大になるならば，何倍かすれば，自由な線形系を与える．有効な非消滅予想はこれを強化したもので，このような Cartier 因子は，何倍かしなくても，必ず有効因子と線形同値になると主張する．この予想は，漸近的な性質ではなく有効な性質を扱っているので，具体的な代数多様体の分類には強力な道具になる可能性がある．2 次元までと，3 次元の極小モデルに対しては，この予想は正しいことが知られていたが，謝氏は，反標準因子が nef であるような 3 次元の代数的多様体に対しても，いくつかの例外を除けば，この予想が正しいことを証明した．

以上の結果は，極小モデル理論の発展に大きく貢献するものである．よって，論文提出者 謝啓鴻 は，博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．