論文の内容の要旨

論文題目 STRATIFICATIONS OF COMPLEMENTARY SPACES OF HYPERPLANE ARRANGEMENTS AND HOMOLOGY GROUPS WITH LOCAL COEFFICIENTS

(和 訳 : 超平面配置の補空間のストラティフィケーションと局所係数ホモロジー)

氏 名　　　　陳 智

この論文はふたつの部分からなっている. 第一部は $M(\mathcal{A})$ すなわち超平面配置の補空間のトポロジーについてである. $M(\mathcal{A})$ のあるストラティフィケーションを用いて, 複体を構成し, その複体によって $M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}})$ の局所系を係数とする無限チェインのホモロジーを計算できることを証明した. 第二部は組紐群のトポロジカル表現についてである. 一般的な条件において私は多重グラフを用いて表現空間の基底を記述し, トポロジカル表現と非可換多項式環との関係を示した.

1　ストラティフィケーションと無限チェインのホモロジー

まず, $\mathcal{A}$ は $\mathbb{R}^n$ 中の超平面配置とし, $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ が $\mathcal{A}$ の複素化とする. $M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}^n \setminus \cup_{H_i \in \mathcal{A}} H_i^{\mathbb{C}}$ とおき, $\mathcal{L}$ は $M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}})$ 上の 1 次元局所系とする. ホモロジー群 $H_*(M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}}), \mathcal{L})$ は様々な数学の分野, たとえば, 超幾何関数, 共形場, 岩堀-Hecke 代数と組紐群のトポロジカル表現などと関連している.

1985 年ごろ, M.Salvetti は $M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}})$ に含まれ $M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}})$ とホモトピー同値である単体複体 $S_{\mathcal{A}}$ を構成し, $S_{\mathcal{A}}$ を用いて $H_*(M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}}), \mathcal{L})$ を計算できるような複体 $(S_*(\mathcal{A}, \mathcal{L}), \partial_*)$ を定義した. 本論文で私は $H_*^{lf}(M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}}), \mathcal{L})$, すなわち $M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}})$ の局所系 $\mathcal{L}$ を係数とする無限チェインのホモロジーを調べた.

超平面配置 $\mathcal{A}$ から, $\mathbb{R}^n$ の自然なストラティフィケーション $S(\mathcal{A})$ が得られる. $r : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n$ を実部への射影とする. r を通じて, $S(\mathcal{A})$ は $M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}})$ のストラティフィケーション $S(\mathcal{A}^{\mathbb{C}})$ を誘導する. 私は $S(\mathcal{A}^{\mathbb{C}})$ のストラタムを用いて, 複体 $(C_*(\mathcal{A}, \mathcal{L}), \partial_*)$ を定義し, その複体によって $H_*^{lf}(M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}}), \mathcal{L})$ を計算できることを証明した. $H_*^{lf}(M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}}), \mathcal{L})$ は $H_*(M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}}), \mathcal{L}^{\vee})$ と双対的な関係をもつことが

よく知られている．私は $(C_*(\mathcal{A},\mathcal{L}),\partial_*)$ と $(S_*(\mathcal{A},\mathcal{L}^\vee),\partial_*)$ の間双対関係が存在していることを示した． 同様に, $\mathbb{C}^n$ からその虚部への射影を用いて, $M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}})$ のほかの ストラティフィケーション $S(\mathcal{A}^{\mathbb{C}})_{im}$ が得られるので, 複体 $(C_*(\mathcal{A},\mathcal{L})_{im},\partial_*)$ が定義できる．$C_n(\mathcal{A},\mathcal{L})_{im}$ の基底は $\mathbb{R}^n\setminus\cup_{H_i\in\mathcal{A}}H_i$ 中の部屋によって与えられる．複体 $(C_*(\mathcal{A},\mathcal{L})_{im},\partial_*)$ のホモロジー群も $H_*^{lf}(M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}}),\mathcal{L})$ と同型である．

局所系 $\mathcal{L}$ が一般的な場合, $H_n(M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}}),\mathcal{L})$ から $H_n^{lf}(M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}}),\mathcal{L})$ への自然な写像 λ_n が同型であることが T.Kohno によって示された．$H_*^{lf}(M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}}),\mathcal{L})$ のサイクルは $H_*(M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}}),\mathcal{L})$ より簡単に構成されるので, 複体 $(C_*(\mathcal{A},\mathcal{L}),\partial_*)$ と $(C_*(\mathcal{A},\mathcal{L})_{im},\partial_*)$ の研究への応用が期待できる．

次の結果は自然な写像 λ_n についてである．$(C_*(M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}}),\mathcal{L}),\partial_*)$ を $M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}})$ の局所系 $\mathcal{L}$ を係数とする特異チェイン複体とすると, 包含写像 $\lambda : C_*(M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}}),\mathcal{L})\to C_*^{lf}(M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}}),\mathcal{L})$ は写像

$$\lambda_n : H_n(M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}}),\mathcal{L})\to H_n^{lf}(M(\mathcal{A}^{\mathbb{C}}),\mathcal{L})$$

を誘導する．$\mathrm{Im}\lambda_n$ の研究は超平面配置理論において重要である．R.Silvotti は共形場理論における共形ブロック空間が超幾何積分による記述と関連して, そのような像空間を考察した．本論文で私は $\mathrm{Im}\lambda_n$ が $H_*^{lf}(M(\mathcal{A})^{\mathbb{C}},\mathcal{L})$ の有界な部屋によって生成される部分空間に含まれることを示した．

2 多重図と組紐群のトポロジカル表現

組紐群 B_n のトポロジカル表現はある Gauss-Manin 接続のモノドロミとして定義される．$LK_n^m(q,t)$ を B_n の m 次トポロジカル表現とする．その表現空間は前に述べたホモロジー群であって, $H_m^{lf}(X_n^m;q,t)$ と書く．私は多重グラフを定義し, 多重グラフ G に付いて $c(G)\in H_m^{lf}(X_n^m;q,t)$ を構成した．組紐の $c(G)$ 上の作用は容易に理解される．私は空間 $H_n[t]=\oplus_{m=1}^{\infty}H_m^{lf}(X_n^m;q,t)$ 上に多重グラフを用いて積を定義し, その積によって $H_n[t]$ が非可換代数の構造をもつことを示した．非可換多項式環 $A_n[t]$ は生成元 $\{X_1,\cdots,X_{n-1}\}$ と関係

$$X_iX_j=tX_jX_i,\ i>j$$

によって生成される環とすると, $H_n[t]$ が $A_n[t]$ と同型であることを示した．

この構造を用いてトポロジカル表現の簡明な代数的な記述を与えた．