論文の内容の要旨

論文題目: Dual fibration of a projective Lagrangian fibration
（射影的ラグランジュファイバー空間の双対ファイバー空間）

氏名: 永井　保成

標準因子が自明な代数多様体は高次元代数多様体の分類理論において重要な位置を占める多様体のクラスであることは良く知られているが，実際これらの多様体は代数幾何の研究において重要であるばかりでなく，数論や数理物理などの隣接分野においても重要であり，盛んに研究されている．たとえば，アーベル多様体の数論幾何的な研究や，カラビ＝ヤウ多様体の数理物理，特にミラー対称性と関連した研究などにその例を見ることができる．

そのような標準因子が自明な射影代数多様体，より広くは，コンパクトケーラー多様体のなかのひとつとして**既約シンプレクティックケーラー多様体**がある．これは，K3 曲面の高次元への自然な一般化のひとつになっている．K3 曲面については，その上の線形系，コホモロジーが非常に良くわかるばかりでなく，周期と同型類，自己同型の間の対応（大域トレリ定理）が知られており，非常に豊かな研究が多く展開されてきた．既約シンプレクティック多様体は K3 曲面と類似の性質を多く持つと広く予想されており，その一部は証明されてもいる [1, 6]．しかしながら，既約シンプレクティック多様体の本格的な研究はまだ始まったばかりといわねばならない．

一般に代数多様体の上のファイバー空間の構造，すなわち正規多様体への射であって，ファイバーが正の次元を持ちかつ連結であるようなもの，はその多様体の情報を多く持つ重要な対象である．たとえば K3 曲面上のファイバー空間の構造は楕円曲面の構造に他ならず，楕円曲面の構造は非常に詳しくわかっている [7] ので，そこからもとの K3 曲面の情報を取り出すことができる．これの高次元化が既約シンプレクティック多様体の上の**ラグランジュファイバー空間**の構造である [8, 9]．射影的なラグランジュファイバー空間の局所的な構造については楕円曲面の場合との強い類似が成り立つことが知られている [10, 11]．

ファイバー空間の大域的な性質を知りたいときには，そのファイバー空間に大域切断が存在する場合を考えると有利になるが，一般のファイバー空間には大域切断が存在するとは限らない．しかしながら，局所切断を持つ，すなわち底空間の任意の点のユークリッド

近傍上に制限すると切断が存在する楕円曲面は，そのヤコビアンファイバー空間を考えることによって大域切断を持つ楕円曲面の場合に還元でき，例えばK3曲面上の楕円曲面には常に局所切断が存在し，そのヤコビアンファイバー空間はまたK3曲面になる．ここで，ヤコビアンファイバー空間と元の楕円曲面の関係は，ヤコビアンがもとのファイバー空間の上の直線束のモジュライ空間として構成されることからきていることが重要であった．

このような観点から，本論文では，ヤコビアンの高次元への拡張であるピカール空間 [2, 4, 5, 13] を用いて，ラグランジュファイバー空間の**双対ファイバー空間**を定義し，次の定理を証明した：

定理. X を（正則）シンプレクティック多様体，$f : X \to S$ をその上の射影的なラグランジュファイバー空間とする．さらに，f は解析位相に関して局所切断を持ち，$R^1\mathscr{O}_X$ が局所自由層になると仮定する．このとき，f の双対ファイバー空間 $\pi : Q \to S$ を考えれば，Q 上に自然なシンプレクティック形式が存在する，更に，そのシンプレクティック形式に関して π はまた（一般に固有でない）ラグランジュファイバー空間となる．

これはモジュライ空間上のシンプレクティック形式の存在の定理と見れば [12] の定理の拡張ともみなすことができるが，証明方法はまったく異なっている．また，既約シンプレクティック多様体上のラグランジュファイバー空間がつねに局所切断を持つかどうかは未解決の問題である．この論文で定義した双対ファイバー空間は一般に非コンパクトであるので，それ自身を代数幾何学的な対象として研究するには不満足であるが，非コンパクトなものを考えることで，可約なファイバーを持つラグランジュファイバー空間をも扱うことができるという利点がある．この双対ファイバー空間の良いコンパクト化が得られれば，多くの幾何学的な応用が期待できる．

射影的既約シンプレクティック多様体上の大域切断を持つラグランジュファイバー空間は，その底空間が射影空間になることが知られている [3]．本論文では上の定理を応用して，これを局所切断を持つ場合にまで拡張した：

系. X を射影的な既約シンプレクティック多様体とし，$f : X \to S$ をその上の局所切断を持つラグランジュファイバー空間とする．このとき，S はその次元が X の次元の半分の射影空間と同型である．

参考文献

[1] Beauville, A., *Variétés Kählerienne dont la première classe de Chern est nulle*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 755–782.

[2] Bosch, S., Lütkebohmert, W., Raynaud, M., *Néron Models*, Springer-Verlag (1990)

[3] Cho, K., Miyaoka, Y., Shepherd-Barron, N.I., *Characterization of Projective Space and Applications to Complex Symplectic Manifolds*, Adv. Std. in Pure Math. **35** (2002), 1–88.

[4] Grothendieck, A., *Techniques de construction en géométrie analytique, IX. Quelques problèmes de modules*, Seminaire Henri Cartan 1960/61, No.16.

[5] —, *Technique de decente et théorémes d'existence en géométrie algébrique, V. Les schémas de Picard. Théorème d'existence*, Seminaire Bourbaki, tome 14, 1961/62, No.232, *VI. Les schémas de Picard. Propriété générales, loc. cit.*, No.236.

[6] Huybrechts, D., *Compact hyper-Kähler manifolds: basic results*, Invent. Math. **135** (1999), 63–113. Erratum **152** (2003), 209–212.

[7] Kodaira, K., *On complex analytic surfaces, II,III,* Ann. Math. **77** (1963), 563-626; **78** (1963), 1–40.

[8] Matsushita, D., *On fibre space structures of a projective irreducible symplectic manifold*, Topology **38** (1999), 79-81. Addendum **40** (2001), 431–432.

[9] —, *Equidimensionarity of Lagrangian fibrations on holomorphic symplectic manifolds*, Math. Res. Letters, **7** (2000), 389–391.

[10] —, *On singular fibres of Lagrangian fibrations over holomorphic symplectic manifolds*, Math. Ann. **321** (2001), 755–773.

[11] —, *Higher direct images of dualizing sheaves of Lagrangian fibrations*, Preprint.

[12] Mukai, S., *Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or K3 surfaces*, Invent. Math. **77** (1984), 101–116.

[13] Raynaud, M., *Spécialisation du foncteur de Picard*, Publ. Math. IHES **38** (1970), 27–76.