論文の内容の要旨

論文題目 **Ramification of p-power torsions of an elliptic curve over a local field**

(局所体上の楕円曲線の p-巾分点の分岐)

氏名 **服部 新**

K を混標数 $(0,p)$ の完備離散付値体とし, π_K をその素元とする. 絶対 Galois 群 $G_K = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ の有限加群への表現が整数環上の有限平坦群スキームの生成ファイバーとして得られるとき, よい表現であるという. このとき, 整数環上のモデルを法 π_K^n-還元することにより, よい表現を調べることと, より簡単な対象である, p-巾で消える Artin 環上の有限平坦群スキームを調べることを結び付けられる可能性が生じる. K の絶対分岐指数 e が $p-1$ 未満であれば, Raynaud の定理 ([4]) によって, 整数環上の有限平坦群スキームからその生成ファイバーの Galois 表現を与える関手は忠実充満であるため, よい表現同士の相互関係までも整数環上の有限平坦群スキームとその還元を使って調べることができる. ところが, e が高い場合, このようなことはもはや成り立たず, 整数環上の有限平坦群スキームを使ってその生成ファイバーの Galois 表現の情報をうまく統制することは困難であると思われてきた. 本論文の主題はこの困難を回避する方法を提示し, その応用として, よい Galois 表現に対して e の大小によらない種々の結果を証明することである.

主定理は次の通りである.

定理 1 (論文, Theorem 9, Corollary 10) A, A' を $\mathcal{O}_K$ 上のアーベル・スキームとする. このとき, $N > ne + e/(p-1)$ なる自然数 N に対し, $A \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/\pi_K^N$ と $A' \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/\pi_K^N$ とが同型な群スキームであれば, p^n-分点が定める G_K の表現 $A[p^n](\bar{K})$ と $A'[p^n](\bar{K})$ とは同型である.

また、A が超特異還元を持つ楕円曲線の場合は, 自然数 N の下限を次のように取れる. A の原点での形式的完備化の p-倍公式 $[p](X)$ における X^p の係数の付値を $f > 0$ とするとき,

- $pe/(p+1) > f$ なら, $N > (e-f)/(p-1)$
- $pe/(p+1) \le f$ なら, $N > e/(p^2-1)$

証明には Abbes-斎藤の分岐理論を用いる. 彼らは古典的な上付き分岐群の定義を一般化し, $\mathcal{O}_K$ 上の有限平坦代数 R に対する分岐フィルトレーションを定義した ([1, 2]). 具体的には, 正の有理数 a を添字とし, R の $\bar{K}$-値点 $R(\bar{K})$ の G_K-集合としての商からなる増大族 $\{F^a(R)\}_{a\in\mathbb{Q}_{>0}}$ を定めた.

本論文ではまず $F^a(R)$ が R の, π_K の a より大きい自然数巾を法とした還元にしかよらないことを示した. 古典的な分岐理論が, 局所体 K の有限次 Galois 拡大 L の整数環の法 π_L-巾還元を使って Galois 群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ にフィルトレーションを入れる, というものだったことを考えると, この結果は分岐理論として備えていなければならない性質であると言える.

従って主定理を得るためには, $A[p^n]$ の分岐フィルトレーションが何番目で自明になるかを調べればよい. A が楕円曲線の場合, このことは, $\mathrm{Spec}\, R$ が 1 次元形式群の p^n-分点である場合に分岐フィルトレーションのジャンプを完全に計算することにより実行される. 正確には次の定理を示す.

定理 2 (論文, Theorem 4) Γ を $\mathcal{O}_K$ 上の 1 次元形式群とする. Γ の p^n-倍公式 $[p^n](X)$ の *Newton* 多角形の左から m 番目の辺の傾きを r_m, y-切片を t_m とおく. $\Gamma[p^n](\bar{K})$ の部分群 $\mathcal{K}_m$ を $\mathcal{K}_m = \{z \in \Gamma[p^n](\bar{K}) \mid \mathrm{ord}_K(z) \geq r_m\}$ で定義する. このとき、$t_m < a \leq t_{m-1}$ なら $F^a(\Gamma[p^n]) = \Gamma[p^n](\bar{K})/\mathcal{K}_m$.

この定理の系として, $\mathcal{O}_K$ 上の有限群スキームが定める K の Galois 拡大の導手の上限を与える Fontaine の結果 ([3]) を剰余体が完全でない場合にも拡張することができる. すなわち;

定理 3 (論文, Theorem 6, Corollary 7, 8) $\mathcal{G}$ を p^n-倍で消える $\mathcal{O}_K$ 上の有限平坦群スキームとする. このとき, $\mathcal{G}$ の分岐フィルトレーション $F^a(\mathcal{G})$ は $a > ne + e/(p-1)$ で自明になる. 従って a が自然数の場合, G_K-加群 $\mathcal{G}(\bar{K})$ は群スキーム $\mathcal{G} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/\pi_K^a$ のみに依存する.

またとくに, $a > ne + e/(p-1)$ であれば, *Abbes*-斎藤の意味での K の第 a-上付き分岐群 G_K^a は $\mathcal{G}(\bar{K})$ に自明に作用する.

この定理から主定理の A が高次元アーベル・スキームである場合が従う.

謝辞 指導教官の斎藤毅教授には論文執筆に際し微細にわたる重要な助言によって証明を本質的に改良して頂いた. 日頃よりの指導と激励に心からの謝意を表する.

参考文献

[1] Abbes, A. and Saito, T.: *Ramification of local fields with imperfect residue fields I*, Amer.,J.,Math. **124** (2002), 879-920

[2] Abbes, A. and Saito, T.: *Ramification of local fields with imperfect residue fields II*, Documenta Math. Extra volume:Kazuya Kato's Fiftieth Birthday (2003), 5-72

[3] Fontaine, J.M.: *Il n'y a pas de variété abélienne sur* $\mathbb{Z}$, Inv. Math. **81** (1985), no. 3, 515-538

[4] Raynaud, M.:*Schémas en groupes de type* $(p, ..., p)$, Bull. Soc. math. France, **102**(1974), 241-280.