論文審査の結果の要旨

氏名 服部　新

K を標数 0 の完備離散付値体で，剰余体が標数 $p > 0$ であるものとする．π を K の素元とする．E を K 上の楕円曲線とし，E はよい還元をもつと仮定する．自然数 $n \geq 1$ に対し，E の p^n 等分点は整数環 O_K 上の有限平坦可換群スキーム $\mathcal{E}[p^n]$ を定める．これの生成点でのファイバーは，K の絶対 Galois 群 $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の表現 $E[p^n](\overline{K})$ を定める．一方，$\mathcal{E}[p^n]$ を，自然数 $m \geq 1$ に対し，$\mathrm{mod}\pi^m$ することにより，O_K/π^m 上の有限平坦群スキーム $\mathcal{E}[p^n] \bmod \pi^m$ が得られる．本論文では，有限平坦群スキーム $\mathcal{E}[p^n] \bmod \pi^m$ が，Galois 表現 $E[p^n](\overline{K})$ を定めるかという問題について研究し，次の結果が得られた．

定理 1 $e = \mathrm{ord}_K p$ を K の絶対分岐指数とする．このとき，$m \geq ne + \frac{e}{p-1}$ ならば，Galois 表現 $E[p^n](\overline{K})$ は有限平坦群スキーム $\mathcal{E}[p^n] \bmod \pi^m$ で定まる．

論文では，楕円曲線の等分点に限らず，p^n 倍すると 0 となるような，一般の有限平坦可換群スキームに対し，定理 1 の主張がなりたつことが示されている．また，楕円曲線の等分点については，楕円曲線の p 分点の還元に応じ，定理 1 より精密な評価が得られている．

定理 1 の証明は，分岐理論を用いてなされる．O_K 上の有限平坦可換環 A に対して集合 $\{O_K$ 上の環準同型 $A \to \overline{K}\}$ を対応させることで定まる関手 $F : (O_K$ 上の有限平坦可換環$) \to (G_K$ の連続作用をもつ有限集合$)$ を考える．分岐理論によれば，正の有理数 $j > 0$ に対し，関手の逆系 $F^j : (O_K$ 上の有限平坦可換環$) \to (G_K$ の連続作用をもつ有限集合$)$ および，関手の射の逆系 $F \to F^j$ が定義される．O_K 上の有限平坦可換環 A に対し，集合 $\{c | j > c$ ならば $F(A) \to F^j(A)$ は全単射である$\}$ の下限 $c(A)$ を A の導手とよぶ．これを用いて，定理 1 は次の主張に帰着される．

定理 2 $\mathcal{G}$ を p^n 倍が 0 であるような，O_K 上の有限平坦可換群スキームとし，A をその座標環 $A = \Gamma(\mathcal{G}, \mathcal{O})$ とする．このとき，導手 $c(A)$ は $ne + \frac{e}{p-1}$ 以下である．

定理 2 は，$\mathcal{G}$ が 1 の巾根のなす群の場合に帰着させて証明される．$\mathcal{G}$ が楕円曲線の等分点の場合には，形式群の p 倍写像から定まる Newton 多角形を調べることによって，より精密な結果が得られる．

ここで得られた評価は，Breuil 加群などを用いて得られるものよりも精密なものであり，たとえば，通常な還元をもつ楕円曲線については最良のものである．また，定理 2 のような評価は，Fontaine が，有理数体上定義されたすべての素数でよい還元をもつアーベル多様体が存在しないという定理を証明した際に用いられた．ここでは，分岐理論を使うことにより，Fontaine のもとの証明よりも簡明な証明が得られている．

以上のように，本論文では，局所体上の有限平坦群スキームの研究への分岐理論の応用について，興味深い新しい結果が示されている．よって論文提出者 服部 新 は博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．