論文の内容の要旨

論文題目 The absolute continuity of a measure induced by infinite dimensional stochastic differential equations
(無限次元確率微分方程式の解の分布の絶対連続性)

氏　名　部家 直樹

(B, H, μ) を抽象 Wiener 空間とする．本論文では，次の形の B-値確率微分方程式を考える:

$$\begin{aligned} dX_t &= dW_t + A(X_t)dW_t + b(X_t)dt, \quad 0 \le t \le T, \\ X_0 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで，W_t は B-値 Wiener 過程で，係数 $A : B \to H \otimes H$ および $b : B \to H$ は，無限回連続的 H-Fréchet 微分可能であり，その各階の導関数は有界であると仮定する．ここで，K を可分な実 Hilbert 空間とするとき，写像 $f : B \to K$ が連続的 H-Fréchet 微分可能であるとは，連続写像 $f^{(1)} : B \to H \otimes K$ が存在して，

$$\lim_{|h|_H \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - f^{(1)}(x)h|_K}{|h|_H} = 0$$

が各 $x \in B$ について成り立つことを言う．本論文の主要な結果は次の通りである．

定理 1. もし，

(A) $E\Big[|(tI_H + \sigma(t))^{-1}|^p_{L(H;H)}\Big] < \infty, \quad \forall p \in (1, \infty), \ \forall t \in (0, T]$

ならば，X_T の分布は μ_T に対して絶対連続である．

上定理において，μ_t $(t \geq 0)$ を写像 $x \mapsto \sqrt{t}x$ による μ の像測度である．また，$\sigma(t) \in H \otimes H$ は Malliavin 共分散作用素であり，有限次元の場合の共分散行列に対応する．

$B = H = \mathbf{R}^d$ の場合は，定理 1 の主張は良く知られている．それは，P.Malliavin が基本的なアイデアを提出し (cf. [5], [6])，楠岡成雄，D.Stroock により精密に議論された (cf. [2], [3], [4])．Malliavin の理論はその後多くの人たちによって発展し，Malliavin 解析と呼ばれる．その概要は [7] に詳しい．本論文は無限次元の場合について，Malliavin 解析の手法を用いて有限次元と同様の結果を得た．

まず確率微分方程式 (1) の解の存在と一意性，および Malliavin の意味での滑らかさについて論じる．次に，Malliavin 共分散作用素を定義し，条件 **(A)** の下で，その逆作用素が滑らかであることを示す．

定理 2. 各 $t \in (0.T]$ について

$$\gamma(t) := (tI_H + \sigma(t))^{-1} - t^{-1}I_H \in W^\infty(H \otimes H)$$

である．

この事実は，有限次元においては行列式の評価を用いて容易に示すことができる．無限次元では行列式に対応するものとして $\det_2$ (cf. [1] Chapter XI.9) があるが，これは行列式と違って多項式ではないので有限次元のときと同じ方法は使えない．そこで，微分も込めて有界な滑らかな cut off 関数をうまくとって，L^p の中で収束することを示す．定理 2 より，次の部分積分の公式が得られる．

定理 3. K を可分な Hilbert 空間とする．任意の $G \in W^\infty(H \otimes K)$, $t \in (0,T]$ に対して，$\rho_t \in W^\infty(K)$ が存在して

$$E[\langle \nabla u(X_t), G\rangle_{H\otimes K}] = E[\langle u(X_t), \rho_t\rangle_K]$$

がすべての K-値多項式 $u \in \mathcal{F}C_b^\infty(K)$ に対して成り立つ．

有限次元においては，上に述べた部分積分の公式から直ちに分布の絶対連続性が従うのであるが，無限次元では Sobolev の不等式などの有限次元における重要な結果を使うことが出来ない．したがって，絶対連続性を示すには別のアプローチが必要である．本論文では，$P_tf(x) = E[f(x+W_t)]$ によって定義される半群 P_t に対する Harnack 型の不等式，Ornstein-Uhlenbeck 半群の超縮小性 (cf. [7])，および定理 3 を用いて，次を示す．X_t の分布の絶対連続性はこの定理から直ちに得られる．

定理 4. $\nu_T = P \circ X_T^{-1}$ を X_T の分布とする．条件 **(A)** のもとで，任意の $p \in (1,\infty)$ に対して，p と T にのみ依存する定数 $C > 0$ が存在して

$$\Big|\int_B f(x)\nu_T(dx)\Big| \leq Ce^{C/\varepsilon^2}\Big\{\int_B |f(x)|^p \mu_T(dx)\Big\}^{1/p} + \varepsilon\|f\|_\infty$$

が任意の有界 Borel 関数 $f : B \to \mathbf{R}$ と任意の $\varepsilon \in (0,1)$ に対して成り立つ．

最後に，条件 (A) が成り立つための充分条件を考える．その一つは一様楕円性である．すなわち，すなわち，$\inf_{|h|_H=1}\left|(I_H+A(0))h\right|_H>0$ であれば，(A) が成立する．これは，有限次元の場合と同様に，ある停止時刻の評価に帰着される．

さらに，一様楕円性より弱い準楕円性の条件のもとで (A) が成り立つことを示す．H の正規直交基底 $\{e_i\}$ をひとつ固定する．$V_i(x)=e_i+A(x)e_i$ とおき，$[V_i,V_j]=V_j^{(1)}[V_i]-V_i^{(1)}[V_j]$ と定める．さらに，

$$\Sigma_j=\{[V_{i_1},[V_{i_2}\cdots[V_{i_{j-1}},V_{i_j}],\cdots]];i_1,i_2,\ldots,i_j=1,2,\cdots\}$$

と定め，$\tilde{\Sigma}_j=\bigcup_{i=1}^j\Sigma_i$ とおく．このとき，ある $N\in\mathbf{N}$ が存在して，$\{V(0);V\in\tilde{\Sigma}_N\}$ の張る部分空間が H で稠密ならば，(A) が成立することが示される．ただし，この場合は拡散係数 A に関して，

$$\sup_{x\in B}\sum_{i=1}^{\infty}|A^{(k)}[e_i,e_i,\ldots,\cdot]|_{L_{(2)}^{K-2}(H;H\otimes H)}<\infty,\quad k\geq 2$$

という条件が必要になる．

参考文献

[1] Dunford, D. and Schwartz, J.T., Linear Operators; Part II: Spectral Theory, Wiley, New York, (1963).

[2] Kusuoka, S. and Stroock, D.W., Applications of Malliavin calculus I, Stochastic Analysis, Proc. Taniguchi Intern. Symp. Katata and Kyoto, 1982, (ed. by K.Itô), 271-306, Kinokuniya, Tokyo, (1984).

[3] Kusuoka, S. and Stroock, D.W., Applications of Malliavin calculus II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA Math., **32** (1985), 1-76.

[4] Kusuoka, S. and Stroock, D.W., Applications of Malliavin calculus III, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA Math., **34** (1987), 391-442.

[5] Malliavin, P., C^k-hypoellipticity with degeneracy, Stochastic analysis, ed. by A. Friedman and M. Pinsky, 199-214, 327-340, Academic Press, New York, (1978).

[6] Malliavin, P., Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operaters, Proceedings of Intern. Sypm. SDE, Kyoto, 1976, ed. by K.Itô, 195-263, Kinokuniya, Tokyo, and Wiley, New York, (1978).

[7] Shigekawa, I., Stochastic analysis, Translations of mathematical monographs,Vol.224, (Iwanami series in modern mathematics), Providence, R.I.,American Mathematical Society, (2004).