論文審査の結果の要旨

氏名　部家直樹

本論文では無限次元ブラウン運動に摂動的拡散項・ドリフト項を付け加えた無限次元空間上の確率微分方程式の解について考察し、その解の時刻 $T>0$ での分布がガウス測度と絶対連続となるための十分条件を与えている。

(B,H,μ) を抽象 Wiener 空間とし、W_t は B-値 Wiener 過程とする。X_t は以下の B 上の確率微分方程式の解とする。

$$dX_t = dW_t + A(X_t)dW_t + b(X_t)dt, \qquad t \in [0,1]$$

$$X_0 = 0.$$

係数 $A : B \to H \otimes H$ および $b : B \to H$ は，無限回連続的 H-Fréchet 微分可能であり，その各階の導関数は有界であると仮定する。

本論文では、この確率微分方程式に Malliavin 解析を適用することを試みた。X_t そのものに Malliavin 解析を適用するのは難しく $X_t - W_t$ に適用し、補正項を加えていくというのが基本的なアイデアである。論文ではまず、確率微分方程式の解 X_t が Malliavinn の意味で滑らかであることを示し、さらに X_t に対応する Malliavin 共分散作用素 $\sigma(t)$ を定義した。これらの定義は有限次元の場合と同じではなく、無限次元の問題を取り扱うために修正された概念を導入している。

本論文ではまず次の定理を示している。

定理　もし，すべての $p \in (1,\infty)$ に対して

$$E[|(tI_H + \sigma(1))^{-1}|^p_{L(H;H)}] < \infty,$$

ならば，X_1 の分布は μ に対して絶対連続である.

定理の証明では、無限次元特有の問題が現れる。まず、Malliavin 共分散作用素の逆作用素 $\gamma(1) = (I + \sigma(1))^{-1} - I$ が Malliavin の意味で滑らかであることを示している。有限次元においては行列式の評価を用いてこのことは容易に示すことができるが、無限次元では行列式が多項式ではなくなることが難点となり、手の込んだ証明を行っている。さらに、有

限次元においてはSobolevの不等式を用いて、微分に対する評価から絶対連続性を示すが、無限次元ではそのような不等式が存在しないために、従来とは全く違う新しい方法を用いている。

論文では最後に，定理の条件が成り立つための十分条件を与えている。1つは、出発点における楕円性である。すなわち，

$$\inf_{|h|_H=1} |(I_H + A(0))h|_H > 0$$

であれば定理の条件が成立することを示している。2つ目は、楕円性より弱いHörmanderの準楕円性の条件に類似した条件である。則ち、以下のような条件である。

$\{e_i\}$ を H の正規直交基底とする。$V_i(x) = e_i + A(x)e_i$ とおき，$[V_i, V_j] = V_j^{(1)}[V_i] - V_i^{(1)}[V_j]$ と定める．さらに，

$$\Sigma_j = \{[V_{i_1}, [V_{i_2} \cdots [V_{i_{j-1}}, V_{i_j}], \cdots]]; i_1, i_2, \ldots, i_j = 1, 2, \cdots\}$$

と定める。ある $N \in \mathbf{N}$ が存在して，$\{V(0); V \in \bigcup_{i=1}^N \Sigma_i\}$ の張る部分空間が H で稠密ならば，定理の条件が成立することが示されている。

この条件を適用する場合、伊藤の公式がポイントとなるが、ここで扱っている確率微分方程式の場合にはラプラシアンが絡み、やはり無限次元特有の問題が生ずる。それに対する条件もきっちり述べられている。

このように本論文では無限次元の確率微分方程式の理論的研究、特にMalliavinn解析の適用について新しい方向性を打ち出し、従来の手法では証明できなかった定理を与えており、高く評価できるものである。

よって、論文提出者　部家 直樹　は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。