論文の内容の要旨

# 論文題目 $p$-adic étale cohomology and crystalline cohomology for open varieties with semi-stable reduction (準安定還元を持つ開多様体の $p$進エタール・コホモロジーとクリスタリン・コホモロジー)

氏名 山下 剛

この論文の主定理では $p$ 進 Hodge 理論における Fontaine-Jannsen の $C_{\mathrm{st}}$ 予想 (辻の定理 [Tsu]) の開多様体に対する拡張を証明する. 大雑把に言うと, それは $p$ 進エタール・コホモロジーとクリスタリン・コホモロジーの比較定理である. そこから開多様体に対する $C_{\mathrm{crys}}$ 予想や $C_{\mathrm{dR}}$ 予想, 一般の $C_{\mathrm{pst}}$ 予想も証明される. 証明には Fontaine-Messing-加藤-辻のサントミック・コホモロジーの手法を使う. Faltings のオルモスト・エタール理論の手法は用いない.

記号を準備する. $K$ を標数 0 の完備離散付値体, $O_K$ をその付値環とする. その剰余体 $k$ は標数 $p>0$ の完全体とする. $K_0$ を $k$ を係数に持つ Witt 環の商体, $\sigma$ を $K_0$ の Frobenius 自己準同型とする. $B_{\mathrm{dR}}$, $B_{\mathrm{crys}}$, $B_{\mathrm{st}}$ を Fontaine の $p$ 進周期の環 ([Fo]) とする. $X$ を $O_K$ 上固有な準安定モデル, すなわち, $X$ は正則で一般ファイバー $X_K$ は $K$ 上滑らか, かつ特殊ファイバー $Y$ は $X$ の被約な正規交叉因子であるものとする. $D$ を $X$ の水平な正規交叉因子で特殊ファイバー $Y$ とも正規交叉を持つとする. $D$ を $D=D^1\cup D^2$ と共通の既約成分持たない 2 つの和に分解する. $D$, $D^1$, $D^2$ の特殊ファイバーをそれぞれ $C$, $C^1$, $C^2$ とする. この時, 次の 3 種類のコホモロジーを考える.

1. (エタール・コホモロジー) $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, D^1_{\overline{K}!}, D^2_{\overline{K}*})$: $K$ の絶対 Galois 群 $G_K$ が連続に作用する有限次元 $\mathbb{Q}_p$ ベクトル空間.

2. (de Rham コホモロジー) $H^m_{\mathrm{dR}}(X_K, D^1_{K!}, D^2_{K*}/K)$: 有限のフィルトレイションを持つ有限次元 $K$ ベクトル空間.

3. (対数的クリスタリン・コホモロジー) $H^m_{\text{log-crys}}(Y, C^1, C^2)$: $N\varphi = p\varphi N$ を満たす $\sigma$ 半線型な Frobenius 自己準同型 $\varphi$ と $K_0$ 線型なモノドロミー自己準同型 $N$ を持つ有限次元 $K_0$ ベクトル空間.

ここでこれらのコホモロジーは部分台付きコホモロジーである. $D^1=\emptyset$ の時は, これらはそれぞれ $X_{\overline{K}}\setminus D_{\overline{K}}$, $X_K\setminus D_K$, $Y\setminus C$ の台を考慮しないコホモロジーになり, $D^2=\emptyset$ の時は, それらの台付きのコホモロジーになる. $Y$ に入れる対数構造やその (部分) 台付きコホモロジーの定義はここでは省略するが, それらの定義のもとで対数的クリスタリン・コホモロジーは有限次元になる. また, これらのコホモロジーは「モティヴィック重みフィルトレイション」と呼ばれる有限フィルトレイション $\{W'_\nu\}_\nu$ を持つ. 「モティヴィック重みフィルトレイション」はクリスタリン Frobenius 重みに対応するフィルトレイションではなく, 大雑把に

言って「他の良い素点での Frobenius 重み」に対応するフィルトレイションであり, $D=\emptyset$ の時は $p$ の所で退化が起こっていても純になる. 「モティヴィック重みフィルトレイション」の定義は省略するが, Deligne の HodgeII([D1]) の類似と思えばよい.

ここで, これから示したい比較同型を部分台付きコホモロジーにまで拡張する事は, 応用上開多様体の代数的対応を考えるときに重要になってくるもので, ある意味いわば「Hom に対する $p$ 進 Hodge の比較」を意味する事に注意する.

開多様体に対する $C_{\mathrm{st}}$ 予想を証明する前にまず, 兵頭-加藤同型 ([HK]) を部分台付きコホモロジーに対して示す.

**Proposition 0.1** *$O_K$ の素元 $\pi$ の選び方にのみ依存する次の同型がある:*

$$\rho_\pi : K \otimes_{K_0} H^m_{\text{log-crys}}(Y, C^1_!, C^2_*) \xrightarrow{\sim} H^m_{\mathrm{dR}}(X_K, D^1_{K!}, D^2_{K*}/K).$$

*さらにこの同型は積構造とも整合的であり, モティヴィック重みフィルトレイションを保つ.*

次がこの論文の主定理である.

**Theorem 0.2** *(open $C_{\mathrm{st}}$) 次の標準的な $B_{\mathrm{st}}$ 同型がある:*

$$B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, D^1_{\overline{K}!}, D^2_{\overline{K}*}) \cong B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} H^m_{\text{log-crys}}(Y, C^1_!, C^2_*).$$

*この同型は $G_K$, $\varphi$, $N$ の作用を保ち, $B_{\mathrm{st}}$ 上 $B_{\mathrm{dR}}$ をテンソルした後の Hodge フィルトレイションも保ち, 積構造とも整合的である. さらに, $D^1=\emptyset$ あるいは $D^2=\emptyset$ の時にはモティヴィック重みフィルトレイションも保つ. ここで両辺にそれらの構造は以下の表のように入っている. (右辺で $B_{\mathrm{st}}$ 上 $B_{\mathrm{dR}}$ をテンソルした後の Hodge フィルトレイションの定義には兵頭-加藤同型を使っている.)*

| | $B_{\mathrm{st}}$ | $\otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, D^1_{\overline{K}!}, D^2_{\overline{K}*})$ | $\cong$ | $B_{\mathrm{st}}$ | $\otimes_{K_0} H^m_{\text{log-crys}}(Y, C^1_!, C^2_*)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $G_K$ | $g$ | $\otimes g$ | | $g$ | $\otimes 1$ |
| $\varphi$ | $\varphi$ | $\otimes 1$ | | $\varphi$ | $\otimes\varphi$ |
| $N$ | $N$ | $\otimes 1$ | | $N\otimes 1$ | $+1\otimes N$ |
| $B_{\mathrm{dR}}\otimes_{B_{\mathrm{st}}}$ 後の $\mathrm{Fil}^i$ | $\mathrm{Fil}^i$ | $\otimes H^m_{\text{ét}}$ | | $\sum_{i=j+k} \mathrm{Fil}^j$ | $\otimes \mathrm{Fil}^k$ |
| $W'_\nu$ | $B_{\mathrm{st}}$ | $\otimes W'_\nu$ | | $B_{\mathrm{st}}$ | $\otimes W'_\nu$ |

この主定理の証明について短く述べる. ナイーヴに比較写像を構成すると積構造との整合性を示す事が困難になり, それにより比較写像が同型である事を示すのが困難になる. この論文では「べったり対数的概型」を導入する事で積構造との整合性の困難を克服して比較同型を証明する.

この主定理から開多様体に対する $C_{\mathrm{crys}}$, $C_{\mathrm{dR}}$, 一般の $C_{\mathrm{pst}}$ が導出される.

**Theorem 0.3** *(open $C_{\mathrm{crys}}$) $X$ を $O_K$ 上固有滑らかな代数多様体, $D$ をその水平な正規交叉因子で特殊ファイバー $Y$ とも正規交叉なものとする. $D$ を $D=D^1\cup D^2$ と共通な既約成分を持たない和に分解する. $D$, $D^1$, $D^2$ の特殊ファイバーをそれぞれ $C$, $C^1$, $C^2$ とする. この時, 次の標準的な $B_{\mathrm{crys}}$ 同型がある:*

$$B_{\mathrm{crys}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, D^1_{\overline{K}!}, D^2_{\overline{K}*}) \cong B_{\mathrm{crys}} \otimes_{K_0} H^m_{\text{log-crys}}(Y, C^1_!, C^2_*).$$

*この同型は $G_K$, $\varphi$ の作用とを保ち, $B_{\mathrm{crys}}$ 上 $B_{\mathrm{dR}}$ をテンソルした後の Hodge フィルトレイションも保ち, 積構造とも整合的である. さらに, $D^1=\emptyset$ あるいは $D^2=\emptyset$ の時にはモティヴィック重みフィルトレイションも保つ.*

**Theorem 0.4** *(open smooth $C_{\mathrm{dR}}$)* $X_K$ を $K$ 上の固有滑らかな代数多様体, $D_K$ をその正規交叉因子とする. $D_K$ を $D_K = D_K^1 \cup D_K^2$ と共通な既約成分を持たない和に分解する. この時, 次の標準的な $B_{\mathrm{dR}}$ 同型がある:

$$B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, D^1_{\overline{K}!}, D^2_{\overline{K}*}) \cong B_{\mathrm{dR}} \otimes_K H^m_{\mathrm{dR}}(X_K, D^1_{K!}, D^2_{K*}/K).$$

この同型は $G_K$ の作用, *Hodge* フィルトレイションを保ち, 積構造とも整合的である. さらに, $D^1 = \emptyset$ あるいは $D^2 = \emptyset$ の時にはモティヴィック重みフィルトレイションも保つ. 特に, *Hodge* フィルトレイションについて $\mathrm{Fil}^0/\mathrm{Fil}^1$ を取る事により, 次の分解 *(Hodge-Tate 分解)* を得る.

$$\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, D^1_{\overline{K}!}, D^2_{\overline{K}*}) \cong \bigoplus_{0 \le j \le m} \mathbb{C}_p(-j) \otimes_K H^{m-j}(X_K, I(D^1_K)\Omega^j_{X_K/K}(\log D)),$$

ここで $I(D_K^1)$ は $D_K^1$ を定義するイデアル層, $\mathbb{C}_p$ は $K$ の代数閉包の $p$ 進完備化とする.

**Theorem 0.5** *(open non-smooth $C_{\mathrm{dR}}$)* $U_K$ を $K$ 上の有限型分離的概型とする. この時, 次の標準的な $B_{\mathrm{dR}}$ 同型がある:

$$B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(U_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \cong B_{\mathrm{dR}} \otimes_K H^m_{\mathrm{dR}}(U_K/K),$$

$$B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét},c}(U_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \cong B_{\mathrm{dR}} \otimes_K H^m_{\mathrm{dR},c}(U_K/K).$$

ここで $H_{\mathrm{dR}}$ は *Hartshorne* の代数的 *de Rham* コホモロジー *([Ha])* を表している. この同型は $G_K$ の作用, *Hodge* フィルトレイション, 積構造とも整合的である. *(ここで Hodge フィルトレイションの定義は省略するが, Deligne の HodgeIII([D2]) の類似と思えばよい.)*

**Theorem 0.6** *($C_{\mathrm{pst}}$)* $U_K$ を $K$ 上の有限型分離的概型とする. この時, $G_K$ の $p$ 進表現 $H^m_{\text{ét}}(U_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$, $H^m_{\text{ét},c}(U_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ は潜在的準安定表現である.

この $C_{\mathrm{pst}}$ 予想に関してはもともと一般の $K$ 上有限型分離的概型に対しての予想であったので, 拡張された予想を証明したのではなくもともとの予想を証明した事になる.

最後に, 同時に提出した参考論文「bounds for the dimensions of $p$-adic multiple $L$-value spaces ($p$ 進多重 $L$ 値空間の次元の評価)」について短く述べる. 参考論文では上の主定理の応用として混合 Tate モティーフに対する $p$ 進 Hodge の比較同型を示し, それを用いた考察を行っている. 主定理では $p$ 進多重 $L$ 値空間の次元の上からの評価を与える. それは複素の多重ゼータ値に関する Zagier の予想の $p$ 進類似である.

## 参考文献


[D1] Deligne, P. *Theorie de Hodge. II.* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. **40** (1971), 5–57.

[D2] Deligne, P. *Theorie de Hodge. III.* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. **44** (1974), 5–77.

[Fo] Fontaine, J. -M. *Le corps des périodes p-adiques.* Periodes $p$-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988). Astérisque **223** (1994), 59–111.

[Ha] Hartshorne, R. *On the De Rham cohomology of algebraic varieties.* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. **45** (1975), 5–99.

[HK] Hyodo, O.; Kato, K. *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles.* Periodes $p$-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988). Astérisque **223**, (1994), 221–268.

[Tsu] Tsuji, T. *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case.* Invent. Math.,t.**137**,(1999) , 233-411.