論文内容の要旨

論文題目
An analysis on expanding nonlinear dynamical systems by symbolic dynamics
（記号力学を用いた拡大的な非線形力学系の解析）

氏名　福田 幸二

1. はじめに

ロジスティック写像の場合によく知られているように，拡大的な非線形な写像を繰り返し適用するとカオスが観察される。このような複雑な挙動を示す力学系の解析手法の 1 つに[Smale, 1967]によって導入された「記号力学」がある．これは，位相空間を生成分割で位相分割して得られる元の力学系と位相共役な記号力学系の上でいろいろな解析をする手法である．1 次元写像・エノン写像・標準写像などの多くの写像について生成分割が求められているが，残念ながら与えられた非線形写像の生成分割を求める一般的な方法は知られていない．離散時間力学系における生成分割に対応する概念として，連続時間力学系の family of good local cross sections (FGLCS)という概念がある．

一方で，実験・観測等で得た時系列を解析するのに，しばしば適当な閾値で観測値を区切っていくつかの離散状態にすることがある．たとえば，日本では最高気温が 30℃以上の日を真夏日と呼んでいる．当然ながら，この 30℃という閾値は生成分割ではない．本論文の主要な目的は，生成的ではない分割（以下，非生成的な分割と呼ぶ）で位相分割したとき，分割に付随する記号力学系がもとの力学系とどのような関係にあるかを調べることである．

本論文では，離散時間と連続時間の力学系をともに扱う．2 節で，全射なテント写像の非生成的な位相分割について考察する．3 節で，双峰写像で駆動されるカオスニューロンモデルの記号力学を解析する．4 節で，連続時間力学系の FGLCS を求めるアルゴリズムを提案する．5 節で，連続時間力学系における，Threshold-crossing inter-spike intervals (TISI)を使った，力学系の再構成について考察する．

2. 全射なテント写像の非生成的分割

この節では，全射なテント写像を非生成的に位相分割したときの各点の旅程からなる記号力学系の振る舞いを，位相エントロピーを通して考察する．

全射なテント写像 $x_{n+1} = f(x_n) = 1 - 2\,|\,x_n - 1/2\,|$ を考える．区間 $[0,1]$ を $p \in [0,1]$ を境にして位相分割し，領域 $(0, p)$ に記号 a，$(p,1)$ に記号 b を割り当てたとき，全ての軌道の旅程を集めた記号力学系を $\Sigma_2^{\{a,b\}}(p)$ で表す．とくに，1 次元写像は極値をとる点を境とする生成分割を持つので，全射性を考えると $\Sigma_2^{\{a,b\}}(1/2)$ はベルヌーイの full 2-shift $\Sigma_2^{[a,b]}$ となる．[Bollt *et.al.*, 2000]に従って，分割の閾値 p の影響を，系の位相的な複雑さを表す位相エントロピー $h\left(\Sigma_2^{\{a,b\}}(p)\right)$ で評価した（図 1）．グラフは無限個のプラトーと段差を持ついわゆる「悪魔の階段」状の形をしているが，単調ではなく所々に極値を持っている．数学的には，連続で，かつ，すべての微分可能な点での傾きが 0 であるグラフを「悪魔の階段」と呼んでいるが，本節ではとくに，このグラフがすべての微分可能な点での傾きが 0 であることを証明する．

閾値 p を $\Delta p > 0$ だけ微小変化させる．p の変化の方向に応じて 2 種類のエントロピーの微小変化，$\underline{\Delta h} = h\left(\Sigma_2^{\{a,b\}}(p)\right) - h\left(\Sigma_2^{\{a,b\}}(p-\Delta p)\right)$ と $\overline{\Delta h} = h\left(\Sigma_2^{\{a,b\}}(p)\right) - h\left(\Sigma_2^{\{a,b\}}(p-\Delta p)\right)$ を考える．さらに，位相空間を $[0,1] \setminus [p-\Delta p, p]$ に制限したときのエントロピーを考えると，$\underline{\Delta h}_1$, $\underline{\Delta h}_2$, $\overline{\Delta h_1}$, $\overline{\Delta h_2} > 0$ として，$\underline{\Delta h} = \underline{\Delta h}_1 - \underline{\Delta h}_2$, $\overline{\Delta h} = \overline{\Delta h_1} - \overline{\Delta h_2}$ とエントロピーの微小変化 Δh を正負の成分に分けることができる．ここで以下の定理が成り立つ．

[定理 1] 十分小さな $\Delta p > 0$ について，以下の 4 つの性質が成立する．

(1) $\underline{\Delta h}_1 = 0$ または $\underline{\Delta h}_2 = 0$
(2) $\overline{\Delta h_1} = 0$ または $\overline{\Delta h_2} = 0$
(3) $\underline{\Delta h}_1 = 0$ または $\overline{\Delta h_1} = 0$
(4) $\underline{\Delta h}_2 = 0$ または $\overline{\Delta h_2} = 0$

したがって，微分可能な点でのグラフの傾きは常に 0 である．図 2 に閾値 Δp とエントロピーの微小変化との関係を示した．さらに，ギャップがあるテント写像についての解析も行った．

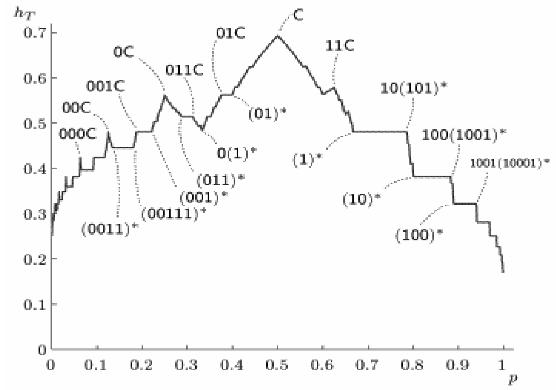

図 1．分割の閾値 p と $h\left(\Sigma_2^{\{a,b\}}(p)\right)$ の関係

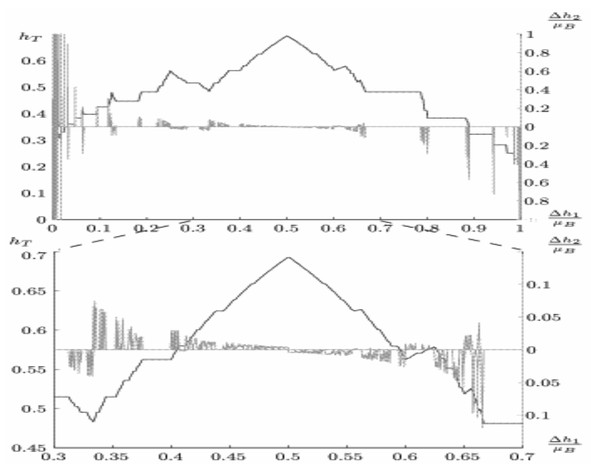

図 2．閾値 p とエントロピーの微小変化の関係

3. カオスニューロンモデル（双峰写像）

この節では，カオスニューロンモデルを扱う．[Aihara *et.al.*,1990]によって提案されたカオスニューロンモデルは，双峰写像の繰り返し適用によって時間発展する内部状態を，ある閾値を境にして発火・非発火の 2 状態として出力するモデルである．写像の極大値・極小値と出力関数の閾値を境に位相分割すると，4 記号の記号力学系に変換できる．

まず，双峰写像の極大値の旅程を固定して極小値のみを変化させたときの出力の位相エントロピーを計算した（図３）．単峰写像でよく知られている「悪魔の階段」構造を見ることができる．さらに，極小値の旅程と，極大値の旅程の相互の関係を解析した．

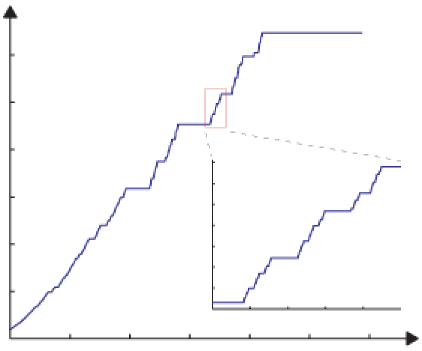

図 3 極大値の変化とエントロピー

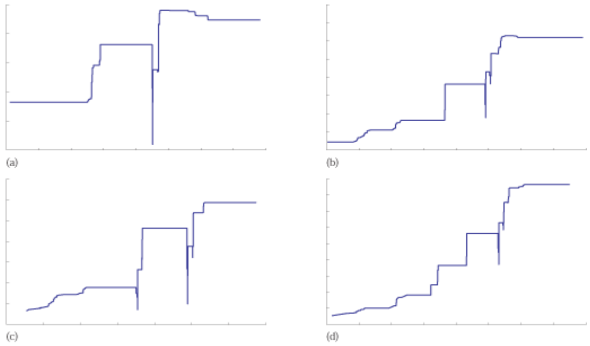

図 4 閾値の変化とエントロピー

次に，極小・極大値をいろいろな値に固定して，閾値を変化させたときの位相エントロピーを計算した（図 4）．この場合には，非単調な「悪魔の階段」構造が見られる．この段差が，極大・極小値の像あるいは，写像の高階の像同士の交点において出現することを，マスク関数の概念を使って示した．さらに，段差の幅とパリー測度との関係を考察した．

4. 連続時間力学系における Family of good local cross sections の推定

本節と次節では連続時間力学系(流れ)を考察する．m 次元の位相空間上に，local cross section (LCS)とよばれる k 枚の $m-1$ 次元の局所的な超平面 $S_1, S_2, \ldots, S_k$ があるとする．ある軌道が貫く LCS を順番に並べたものを，可能な軌道全てについて集めると，$S_1, S_2, \ldots, S_k$ をアルファベットとする記号力学系が得られる．ここで，LCS をうまく選ぶと，この記号力学系の懸垂と，もとの流れとが位相共役になる．このような LCS の組を family of good local cross sections(FGLCS)と呼んでいる[Sun & Vargas,1999]．FGLCS は，離散時間力学系（写像）における生成分割の概念に対応する．この節の目的は，[Kennel & Buhl, 2003]で提案された写像の生成分割を求める手法を流れに拡張し，与えられた流れの FGLCS を推定することである．この手法は，FGLCS の元では異なる軌道は異なる記号列に写される，という事実を利用する．すなわち，異なる軌道でありながら同じ旅程記号列を持つような軌道の組(Symbolic False Nearest Neighbor (SFNN))の数を最小化するように family of LCS を決める．具体的なアルゴリズムを以下に示す．

1. LCS の数を $k=2$ とする．
2. 各 LCS を A 枚の $m-1$ 次元超円盤の和集合で表す．
3. 2.の元での位相空間上の全軌道の旅程を計算する．
4. 全軌道に対する SFNN の割合を最小化するように A 枚の $m-1$ 次元超円盤の中心・半径を最適化する．
5. 最適化の結果 SFNN がある割合以下になれば終了．そうでなければ，$k \leftarrow k+1$ として 1.へ戻る．

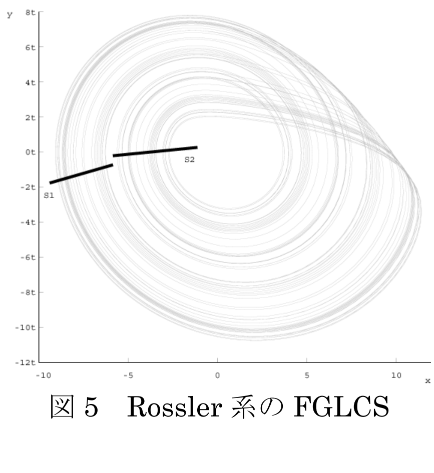

図 5　Rossler 系の FGLCS

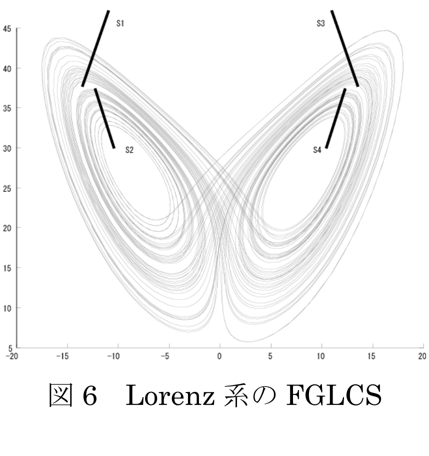

図 6　Lorenz 系の FGLCS

本手法を Rossler 系と Lorenz 系に適用した結果を，それぞれ，図 5 と図 6 に示した．各 LCS は，ポアンカレ写像の極大値のところで区切られている．これは 3 次元流れにおけるテンプレートの理論とよく一致している．テンプレートの理論が 3 次元流れに限られるのに対して，FGLCS は高次元流れでも考えることができるという利点がある．

5. Threshold-crossing inter-spike intervals (ISI) と位相エントロピー

連続時間力学系の位相空間上に任意に閾値となる超平面をとり，軌道がそこを通過する時刻の時間間隔(ISI)を観測する．これは，実験・観測で得た連続時間時系列を疎視化するもっとも単純かつ一般的な方法と考えられる．この解析手法によって有意な結果を得るには，閾値をどのような範囲にとる必要があるのかが問題となるが，[Nishikawa & Sauer]による ISI 埋め込み定理によると，ほとんど全ての場合について ISI から元の力学系のアトラクタを再構成することが可能である．しかし，この定理は，元の力学系の時間的な情報については言及しておらず，ISI 再構成によって，エントロピーやリアプノフ指数などの時間依存な特徴量を計算することが可能かどうかは知られていない．一方で，閾値がある範囲にある場合には，ISI 再構成によって最大リアプノフ指数を推定できるという実験的な報告がある[Jansen *et.al.*,1998; Pavrov *et.al.*,2001].

本節の目的は，どのような閾値の範囲で，ISI 埋め込みから時間依存な情報を計算可能なのかを考察することである．とくに時間依存な特徴量である ISI 列の位相エントロピーに注目する．時間軸を幅 w ごとに区切り，各ビンに spike が存在すれば記号 1，しなければ記号 0 を割り当てたシフト空間の位相エントロピーを h_w とする．ISI 列の位相エントロピーは，$\lim_{w\to 0} h_w / w$ で定義される．この定義はシフト空間の位相エントロピーの自然な拡張になっている．また，ISI エントロピーは，もとの力学系の滑らかな変換に対して不変であることを示した．ここで，以下の定理が成り立つ．

［定理 2］ $x = x_C$ で極大値をとる単峰写像 $f : I \to I$ と，プラトーを持たない C^2 関数 $\omega : I \to R_+$ について，以下の式で定義される f の周波数 ω のもとでの懸垂 $\left(\Lambda_I^f, \varphi\right)$

$$\Lambda_I^f := \{(x,\theta)\,;\ x \in I,\, 0 \le \theta \le 1\} / (f(x),1) \approx (x,0)$$

$$\varphi((x,\theta),t) := (x, \theta + t\omega(x))$$

の $x = p > x_C$ を境とする threshold-crossing ISI の ISI エントロピーは，f の位相エントロピーに等しい．

実際に Rossler 系について平面 $x = p$ を閾値としたときの ISI エントロピーを[Hirata & Mees,03]の手法を用いて推定した（図 7）．定理 2 は，ω が x のみに依存するとしているため，Rossler 系には直接適用することはできないにもかかわらず，定理 2 から予想されるように，閾値が FGLCS の境よりも内側にある限り ISI エントロピーが Rossler 系のエントロピーに等しいという結果を得た．さらに，[Pavrov *et.al.*, 2001]で報告された，最大リアプノフ指数を正しく推定可能な範囲とも一致している．

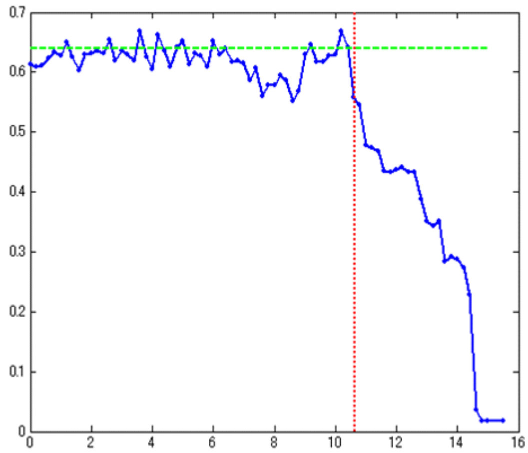

図 7．閾値 p と ISI エントロピーの関係
横破線はもとの Rossler 系エントロピー
縦破線は，FGLCS の境を表す．