論文の内容の要旨

論文題目　Theory of Least Squares Estimators in Linear Regression with Covariance Structure
（共分散構造を持つ線形回帰の最小２乗推定量の理論）

氏　　名　宇佐美 嘉弘

本論文では、線形回帰モデルの誤差項の共分散行列に様々な構造を仮定して、最小２乗法により回帰係数を推定する問題を扱い、最小２乗推定量（LSE）の性質を、理論的･数値的に調べた。ただし、独立変数は定数である場合のみを考えた。

係数を推定するのに、共分散構造を考慮しない場合は、普通最小２乗法を用いる。もし共分散が既知であれば、一般化最小２乗法で係数を推定する。前者の方法で得た推定量を普通最小２乗推定量（OLSE）と呼び、後者の方法で得たものを Gauss-Markov 推定量（GME）と呼ぶ。これらの性質については、２つの重要な定理がある。一方は、線形で不偏な推定量の中では、GME が最小分散を持つことを示したGauss-Markovの定理である。このことから、GMEは最良線形不偏推定量と呼ばれる。他方は、誤差の系列が定常である場合に、OLSEの共分散行列がGMEの共分散行列に漸近的に等しくなるための、独立変数と誤差項に対する条件を示したGrenander-Rosenblatt の定理である。

一般に誤差の共分散は未知であるから、GME は使えない。また誤差の系列が定常でも、有限な標本数ではOLSEの効率は悪い可能性がある。そこで、共分散行列を推定できれば、その推定量を用いて、OLSE より有効な推定量が得られるかもしれない。GME において共分散行列をその推定量で置き換えたものを、一般化最小２乗推定量（GLSE）と呼ぶ。また、相関は考慮せず、分散だけを推定して、分散の推定量を重みとして用いた回帰係数の推定量を、加重最小２乗推定量（WLSE）という。

共分散の推定には、OLSE による回帰残差（OLS 残差）を用いる。誤差項やその共分散構造に仮定したモデルのパラメータを推定するには、モデルを OLS 残差に当てはめる。本論文では、誤差項が従

うモデルのパラメータの OLS 残差を用いた推定量や、共分散行列の推定量を用いた GLSE の性質を主に調べた。また、誤差項の分散が変動する場合に、ノンパラメトリックな方法により分散を推定する問題も扱った。

論文は全8章から成り、各章の題目は次の通りである。

1 Introduction
2 Estimation of a Regression with an Error Model of Infinite Order Parameters
3 Asymptotic Properties of Least Squares Estimators of a Polynomial Regression with a Heteroskedastic Error
4 Estimation of the Coefficients of Time Series Regressions with Nonstationary Error Processes
5 Estimation of Regression Coefficients by using Misspecified Covariance Structures to Error Processes
6 Approximations to the Distributions of the GLSEs and GLSPs of Regressions
7 Degeneracy of the Distributions of the GLSEs of Regressions with Circularly Distributed Errors
8 Comments on the results and further studies

第1章では、先に挙げた2つの定理を説明し、その後の各章の概要を示した。第2章から第7章においては、それぞれのテーマにそった研究内容を述べた。第8章では、第2章から第7章の内容に対して全般的な評価・反省をして、さらに残された問題・今後の研究の方針を示した。第2章以下の内容は次の通りである。

第2章においては、誤差項が無限次数の線形な確率過程に従う場合を考えた。そのような確率過程の係数、分散、スペクトル密度の推定については、すでに Berk (1974) などの研究がある。ここでは、Berk (1974) のモデルを誤差の系列に仮定して、OLS 残差を用いて、モデルのパラメータやスペクトル密度を推定した。このとき、有限次数のモデルとみなして係数を推定し、推定量が一致性を持つために、標本数を増加させたとき、それに対応して推定する係数の数のオーダーを評価した。さらに、誤差の系列が従う過程の係数の推定量を基にして、共分散構造を考慮したGLSEを考え、その一致性を示した。

第3章では、誤差項が不等分散を持つ非定常な場合を扱った。Grenander-Rosenblatt の定理の条件が成立しない場合である。理論的に分析するために、時間を独立変数とする多項式回帰で、分散も時間の多項式で表現されるものとした。このとき、回帰係数の OLSE や分散の推定量が一致性を持つための、独立変数と分散それぞれの多項式のオーダーの関係を評価した。ここで、誤差項の間の相関関係にも仮定を置いた。

さらに、線形トレンドの場合に、切片と傾きの OLSE と GME それぞれの共分散行列について、標本数を無限大とした極限を評価した。ただし、誤差項の分散は時間の多項式で表されるが、無相関とした。パラメータの値を変化させて、2つの共分散行列の極限について理論値を計算し、GME に対するOLSEの効率を比較した。分散の変動が激しくなるにつれて、GME に対するOLSEの効率は悪くなる。

第4章では、誤差項が不等分散を持つ回帰モデルの LSE の性質を、小標本の場合についてモンテカルロ実験で調べた。OLS 残差の2乗の系列を移動平均したもので分散を推定するノンパラメトリックな方法を考えた。さらに、分散の推定量を重みとして、回帰係数を WLSE で推定する。ただし、移動平均に用いる OLS 残差の数を決める規準については議論しなかった。

提案した推定量を、Harvey and Robinson (1988) の GLSE など他の LSE と比較した。変動する分散をノンパラメトリックな方法で推定した WLSE の方が、他の推定量より有効である。誤差項の相関構造まで推定して GLSE を用いると、推定量の効率は下がる場合がある。小標本の場合に不等分散な誤差項を持つ回帰モデルを推定するには、相関構造は考慮せず、分散の変動を推定するだけでも、OLSE に比べてかなり効率が良くなる可能性がある。

第5章においては、誤差項の共分散構造を誤った場合の GLSE の性質を調べた。時系列に誤ったモデルを当てはめたと仮定して、そのパラメータの推定量の性質を調べる研究はすでにある。ここでは、誤差の系列が定常な自己回帰モデルに従うとは限らない場合に、特に定常な自己回帰モデルを OLS 残差に当てはめて、誤差項の共分散行列を推定する場合を扱った。

当てはめた自己回帰モデルが誤りでも、理論的には GLSE が一致性を持つ条件を考え、例として、観測途中の一時点で係数が変化する非定常な自己回帰モデルと移動平均モデルを挙げた。いずれも次数は1である。これらの例については漸近的な性質に加え、モンテカルロ実験により、小標本での GLSE の性質も分析した。

誤差の系列が非定常な場合に、OLS 残差の系列に当てはめた定常な自己回帰モデル (1次とは限らない) の相関構造を用いた GLSE によって、OLSE より有効な推定ができる可能性があることを示した。Grenander-Rosenblatt の定理により、誤差の系列が定常であれば、大標本では OLSE と GME それぞれの共分散行列の値は近いと考えられる。ところが、数値実験では、小標本でも2つの共分散行列の値は近く、余計なパラメータを推定する分だけ、GLSE を用いても OLSE より有効な推定はできそうにないことも分かった。

第6章は、GLSE や一般化最小2乗予測量 (GLSP) の確率密度関数を近似する問題を扱った。Kariya and Toyooka (1992) では、誤差項が正規分布に従う場合に、GLSE と GLSP の確率密度関数や分布関数を正規近似したときの一様限界を理論的に示している。この限界を一般的な楕円分布の場合に拡張することを考えた。

また、Kariya and Toyooka (1992) が求めた限界を、誤差の系列が1次の自己回帰モデルに従う場合について数値的に調べた。自己回帰係数の値を大きくすると、限界が大きくなり、近似の精度は悪くなる。このとき必要な LSE の共分散行列が、モデルのパラメータによって表現できないため、その値をモンテカルロ実験により求めた。

第7章では、特殊な問題を扱った。切片を持つ回帰モデルで、その誤差の系列が循環型自己回帰モデルに従う場合、GLSE と GME の差の分布が退化することを示した。OLSE と GME が一致する条件を求める研究はすでにある。しかし、推定量の差の分布が退化する場合の条件について報告はなかった。ただし、ここでの証明方法では、回帰モデルの独立変数が2つで、その1つが定数の場合 (切片を持つ場合) しか扱えなかった。一般には LSE の間の差は平面上に分布するはずが、退化して直線上

に分布することを示した。

第8章では、総括と残された課題を述べた。第2章や第3章における、誤差項が従うモデルのパラメータの推定量や LSE の性質についての漸近理論に基づく研究では、GLSE の漸近分布を求めるまでには至らなかった。第2章の問題の場合、標本の大きさに比べて、推定するパラメータの数が多ければ、GLSE の効率は悪くなると考えられる。有限標本での GLSE の性質をモンテカルロ実験により調べる必要がある。

第4章のモンテカルロ実験では、様々な場合を想定して LSE の有効性を分析した。しかし、第5章におけるモンテカルロ実験は十分とは言えず、他にも非定常なモデルを誤差項に仮定した場合を扱うべきであった。

OLSE と GME それぞれの共分散行列の差が大きければ、GLSE を用いて OLSE より有効な推定ができるが、その差が小さければ、GLSE の効率は OLSE より悪くなると考えられる。第4章のモンテカルロ実験で、誤差に相関関係があっても、それを無視して GLSE の代わりに WLSE を用いることで、OLSE より有効な推定ができる可能性があることが分かった。特にノンパラメトリックな方法で推定した分散を用いた WLSE は、他の LSE より有効であった。これらの点について、さらに詳しく研究したい。

Kariya and Toyooka (1992) の限界を、正規分布より広い楕円分布に拡張する第6章での試みは、不十分であった。正規分布でない楕円分布を誤差項に仮定して、GLSE の分布を GME の分布で近似する場合の限界を評価したい。また、モンテカルロ実験では、非定常なモデルを誤差の系列に仮定した場合も調べたい。

第7章の結果については、残念ながら独立変数が2つの場合しか示せなかった。その後、独立変数が一般的な個数に対して拡張する証明法が示された。誤差項が循環分布に従い切片を持つ回帰モデルの場合、LSE の差の分布は独立変数の数より1つ次元が退化する。