［別紙２］

審　査　の　結　果　の　要　旨

論文提出者氏名　　宇佐美　嘉弘

本論文は、統計学における重要な基本問題の１つである一般化最小２乗推定量の推定効率の問題に関する､論文提出者の一連の研究をまとめたものである。

周知の通り、一般線形回帰モデルにおいて誤差項の共分散行列が既知である場合、Ｇauss-Markov 推定量（Gauss-Markov estimator, 以下 GME と略）が回帰係数の最良線形不偏推定量となる。これを Gauss-Markov 定理と呼ぶ。しかし、多くの実際的問題においては誤差項の共分散行列は未知であり、従って GME は通常の意味での推定量ではない。この場合、GME に含まれる未知の共分散行列をその推定量で置き換えて得られる推定量がしばしば用いられる。これを一般化最小 2 乗推定量（generalized least squares estimator, 以下 GLSE）と呼ぶ。GLSE には、特殊な場合として、誤差項の共分散構造を無視した普通最小２乗推定量（ordinary least squares estimator, 以下 OLSE）も含まれる。

一般に GLSE の推定効率は誤差項の共分散行列の推定精度に依存して定まるため、GLSE に関する理論的研究では誤差項の共分散行列の推定問題に焦点が当てられることが多い。その際、誤差項の共分散行列が少数の未知パラメータの関数であり、かつその関数形（以下、共分散構造と呼ぶ）が既知であるという条件がしばしば置かれる。しかし、共分散構造が既知という状況は必ずしも自然なものではなくて、部分的にしか分かっていない場合や全く未知の場合もあり得る。このような場合に、GLSE をどのように構成すればよいのか、またその推定効率はどれほどかといった問題は十分に解かれていないのが現状である。

このような視点に立って、本論文の前半部では、次の２つの基本問題

(1) 誤差項の共分散構造を部分的にしか利用しない場合の推定効率の評価 (第 2,3 章)

(2) 誤差項の共分散構造を具体的に特定化しない場合の推定効率の評価 (第 4,5 章)

を扱い、それぞれに対して理論的結果を導出している。

また、GLSE は一般に観測値ベクトルの非線形関数であるため、共分散構造が正しく特定化されていたとしても、小標本における推定効率やその厳密分布を明示的に評価することは容易ではない。この視点から議論が組み立てられているのが後半部である。そこでは、GLSE の厳密分布に関する次の２つの問題として

(3) GLSE の厳密分布を GME の厳密分布で近似したときの
近似誤差の評価 (第 6 章)

(4) GLSE の厳密分布が 1 次元空間上に退化するという現象
(第 7 章)

が扱われている。

これらの結果は、これまで多くの研究蓄積がなされてきた回帰分析全体からみても大きな貢献であると評価される。以下、具体的にこの論文で得られた結果の要旨を紹介し、評価する。

第 1 章では、本論文の具体的構成と、本論文の理論的基礎をなす定理である Gauss-Markov 定理、Grenander-Rosenblatt 定理の２つが紹介されている。Grenander-Rosenblatt 定理とは、誤差項が定常過程であるような時系列回帰モデルにおいて、OLSE の共分散行列と GME の共分散行列とが漸近的に等しくなるための十分条件を明らかにしたものである。Grenander-Rosenblatt 定理で課される条件を、以下 Grenander 条件と呼ぶ。

続く第 2 章以下が、論文提出者の貢献である。

第 2 章では、誤差項の分布が無限次数の線形な確率過程で表される一般線形回帰モデルの推定問題が扱われている。本章で用いられる推定方式は、真の確率過程を有限次数の AR(k)過程（auto-regressive process of order k）で近似し、OLSE 残差に基づいて AR(k)過程のパラメータの推定を行い、その推定値を用いた GLSE によって回帰係数を推定する、というものである。そして、標本サイズが無限大となるに従って近似モデルの次数 k も無限大となる場合を扱う。この問題設定は、Berk が 1974 年に提唱したモデルを時系列回帰モデルへと拡張したものである。

ここで興味ある問題として、(ｉ)近似モデルのパラメータの推定量や GLSE は一致性を持つか、(ⅱ) 収束のオーダーが Berk 等のものと同一となるのか、などが挙げられる。これらの問題に対する解が定理 2.1、2.2、2.3 で与えられ、Berk と同一条件の下での一致性が示される。この結果は、先行研究の数学的拡張として重要であるだけでなく、標本サイズが大となるに従って近似モデルが真の構造に限りなく近づく場合の GLSE の漸近的性質が明らかにされているという点で、応用上重要な示唆を与えるものと言える。

第 3 章は、誤差項が不均一分散を持つ非定常時系列回帰モデルの推定問題を扱っている。誤差項の分散は時点 t の多項式で与えられるものとし、かつ誤差項間の相関係数には、時点差が大きくなるに従って緩やかに小さくなるような構造が仮定される。また、説明変数は時点 t の多項式であるとする。

論文提出者は、まず命題 3.1 において OLSE が一致性を持つための十分条件を明らかにしている。これは、誤差項の共分散構造を無視した推定量を利用した場合でも一致性が得られるのかという自然な問いへの１つの解答となる。続く命題 3.2 と 3.3 では、OLSE 残差に基づくある種の典型的な分散の推定量を取り上げ、これが一致性を持つための十分条件が導出されている。また、定理 3.1 では OLSE と GME の漸近共分散行列の具体的表現が与えられている。

命題 3.1-3.3 における十分条件が、分散を表現する多項式の次数のみによっ

て表せる点は興味深い。また、定理 3.1 は Grenander-Rosenblatt 定理の枠組の外にあることから、Grenander 条件が成立しない場合に OLSE が GME よりどれほど劣るのかについて明示的な結果を与えている点で評価出来る。やや残念なのは、本章では分散の推定量を用いた GLSE に関する考察がなされていないことであり、この点に関しては今後の研究が待たれる。

第 4 章では、誤差項の共分散構造に具体的な構造を仮定しない場合の推定問題を扱う。先行研究として、ノンパラメトリックモデルの枠組での研究である Robinson の 1987 年の論文、および Harvey and Robinson の 1989 年の論文などを挙げることが出来る。本章では、加重最小 2 乗推定量（weighted least squares estimator, 以下 WLSE）の小標本における推定効率の評価に焦点が当てられている。ここで WLSE とは、誤差項の共分散行列のうち対角成分（各時点の分散）のみを推定量で置き換え、非対角成分（共分散）を 0 で置き換えた GLSE を指す。論文提出者は、WLSE における分散の推定量として２乗ＯＬＳＥ残差の系列の移動平均を用いることを提案している。

この WLSE と他の幾つかの競合推定量との小標本における相対効率を数値実験によって調べることが本章の主題である。より具体的には、（ⅰ）誤差項間の相関の強弱と WLSE の推定効率との関係、（ⅱ）不均一分散性の強弱と WLSE の推定効率との関係、（ⅲ）移動平均の幅の選択、の観点から数値実験がなされている。論文提出者は、それぞれについて、（ⅰ）誤差項間の相関や不均一分散性が強くなるに従って OLSE に対する WLSE の相対効率は向上する、（ⅱ）移動平均の幅は T=50 に対して 5-7 前後が最適である、（ⅲ）多くの場合で WLSE は他の推定量よりも優れているという結果を得ている。

第 5 章も前章に引き続き、誤差項に具体的な共分散構造を仮定しない場合の推定問題を議論している。本章では、共分散構造に AR(p)過程の構造を当てはめ、OLSE 残差から AR(p)過程のパラメータの推定を行い、その推定値を用いて得られる GLSE が扱われている。誤差項の真の相関係数は、時点差が大となるに従って緩やかに小さくなることを仮定する。このモデルには、構造変化を持つ AR(1)過程など、幾つかの興味深い確率過程が含まれる。主要な結果である定理 5.1 において GLSE の一致性が示されている。また、数値実験によって GLSE と GME との小標本における相対効率も評価されている。

続く第 6 章、第 7 章では GLSE の小標本特性が議論されている。

既に述べた通り、GLSE は一般に観測値ベクトルの非線形関数であるため、その小標本特性を調べることは容易ではない。実際、GLSE の厳密分布は殆どの場合について知られていない。分布の知られている少数例でもその複雑さゆえに殆ど実用化されていない。この視点に立って、第 6 章では、GLSE の確率密度関数を GME の確率密度関数で近似したときの近似誤差を評価する。先行研究としては、近似誤差の一様限界を導出した 1992 年の Kariya and Toyooka の結果がよく知られている。しかし、Kariya and Toyooka では誤差項が正規分布に従うという強い仮定を置いており、必ずしも実用的ではない。本章の主題は、正規性の仮定を楕円対称分布にまで緩和することである。主な結果は、定理 6.1 に与えられており、そこで一様限界の理論的導出が行われている。

また、数値実験によって、誤差項が AR(1)過程に従う単回帰モデルにおける一様限界値の具体的計算も試みられており、これを通じて自己回帰係数の値が１に近づくにつれて一様限界の値が大となることが観察されている。これらの結果は、前述の Kariya and Toyooka 論文の１つの自然な数学的拡張であり、その点で重要な貢献と考えられる。GLSE の分布を、（極限分布である）正規分布と比較するのではなくて、GME の分布（これは必ずしも正規分布とは限らない）と比較するという視点は独創的であり、先行研究の見落としてきた部分に光を当てたと言えよう。

第 7 章では、定数項を持つ単回帰モデルにおける GLSE の厳密分布に関する新しい事実が導出されている。GLSE の推定誤差は、「GME の推定誤差」と「GLSE と GME との差」の 2 つの項の和に分解される。両者は、正規分布の下では独立であり、楕円対称分布の下では無相関となる。このうち、「GME の推定誤差」は誤差項の 1 次形式であるため、その分布を求めることは容易である。それに対して、「GLSE と GME の差」は誤差項の複雑な非線形関数であり、分布的性質は殆ど知られていない。

本章では、循環型 AR(p)過程の下で、「GLSE と GME の差」（これは 2×１ベクトルである）の分布が直線上に退化することが証明されている（定理 7.1）。また、その直線は未知パラメータによらず一定であることも併せて示される。この結果はその問題設定も含めて論文提出者の独創性によるものであって、先行研究が全く見落としてきた部分でもある。その意味で高く評価されてよいだろう。惜しむらくは、この結果の推測理論への応用が議論されていない点である。定理 7.1、7.2 を用いれば、誤差項が正規分布に従うという条件の下で、GLSE の共分散行列の構造が「GME の共分散行列」 + 「スカラー」×「ランク１の既知行列」という形であることが分かる。この結果を用いれば従来よりも精密な推測が可能となるはずである。この点での今後の研究を期待したい。

以上の内容を持つ本論文には、次のような長所が認められる。

第一に、共分散構造を特定することの困難性は現実のデータ解析においてしばしば直面する問題であり、この問題を正面から議論している点である。本論文では一貫して、具体的な共分散構造を仮定しないモデル、共分散構造が誤って特定化されているモデルが扱われている。共分散構造を既知とすれば、モデルは単純となり数学的にはより見通しのよい議論が可能となるはずであるが、論文提出者はこのような単純ケースではなくて、より現実に即したモデルに焦点を当てている。この点は高く評価されるべきであろう。

第二に、随所で非常に独創的な問題が設定されていることである。第 2 章、第 6 章は先行研究の数学的拡張であり、これはこれで優れた研究であるとともに、一方で第３章、第４章、第７章のように先行研究では扱われていないようなモデルや推定方式、あるいは数学的事実を議論する章があり、読者に一般化最小２乗法の理論の新たな側面を提示していることである。

しかしながら、本論文にも不十分な点がないわけではない。例えば、第２章の主結果は一致性の証明のみに止まっており、漸近正規性、漸近共分散行列についての言及がない。これらは、基本的には GME と GLSE との漸近的

同等性から導かれるものであり、論文提出者にとって必ずしも高いハードルではなかったと考えられるだけにやや隔靴掻痒の感が残る。

また、実用性という観点からの総括に乏しい点にも不満が残る。本研究から、どのような場合に OLSE が望ましく、どのような場合に GLSE を使うべきなのかに関する指針を導き、データ解析の現場へフィードバックすべきであろう。

しかしながら、このような欠点は本論文の基本的価値を損なうものではない。一般化最小２乗法は長い歴史を持つものの、本論文のように共分散構造の特定化が必ずしも容易ではないような複雑な変動構造を持つデータの解析という観点からは、それほど多くの研究蓄積がなされているわけではないからである。

以上、本論文は若干の欠点を持つとは言え、一般線形回帰モデルの誤差項の共分散行列に種々の構造を仮定することによって GLSE の理論的性質を多面的に明らかにしており、統計学に有意な貢献をなしていると言える。

よって審査委員会は、本論文を博士（学術）の学位請求論文として合格と認めるとの結論に達した。

引用文献

Berk, K.N.(1974), Consistent autoregressive spectral estimates, *Ann. Statist.*, 2, 489-502.

Harvey, A.C. and Robinson, P.M. (1988), Efficient estimation of nonstationary time series regression, *J. Time Ser. Anal.*, 9, 201-214.

Kariya, T. and Toyooka, Y. (1992), Bounds for normal approximations to the distributions of generalized least squares predictors and estimators, *J.Statist. Plann. Inference*, 30, 21-221.

Robinson, P.M. (1987), Asymptotically efficient estimation in the presence of heteroskedasticity of unknown form, *Econometrica*, 55, 875-891.