論文の内容の要旨

論文題目　Mathematical Models in Finance and Approximate Calculation

（ファイナンスにおける数学モデル及び近似計算の研究）

氏名　張　娜

Option とは　所有者に特定の資産を決められた時間と価額で売買する権利を与えるものである。満期にしか行使できない option は European option、満期までの任意の時刻に行使できるのは American option、また満期まで決められたいくつかの時刻に行使できるのは Bermuda option と呼ばれる。American option の価格に対して、特別の場合を除き、解析解が知られていないので、数値計算を用いなければならない。数値計算法は主に三種類ある：１. Analytical approximation; 2. Stochastical simulation method; 3. Numerical solution of Black-Scholes equation subject to boundary conditions.

この論文では, Bermuda Option の価格問題を解決する新しい方法を紹介する。この方法の基本的 idea は Least Square Monte Carlo 方法で $v_n(X(T_n)) - E[v_n(X(T_n))|\mathcal{F}_{T_{n-1}}]$ をマルチンゲールとして近似する、この結果を Rogers の近似方法 Optimization Martingale method に応用し、Bernuda option の価格の upper bound が与える。以下に数学モデルを紹介する。

$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ はブラウニアンフィルトレションとし、フイルタ付き確率空間 $(W, \mathcal{B}(W), \mu, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)})$ 考える。 $W = C([0,T], \mathbb{R}^{\mathbb{D}})$、 μ は W 上 Wiener 測度で、 $\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ は この空間で定義した d 次元 $\mathcal{F}_t$−Brownian 運動、$B^0(t) = t$、$V_0, V_1, \cdots, V_d \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{D}})$ とし、Underlying process $X(t; s, x)$ は次の確率微分方程式を満たしていると仮定する。

$$X(t;s,x) = x + \sum_{i=0}^{d} \int_s^t V_i(X(u;s,x)) \circ dB^i(u), \quad t \geq s. \tag{1}$$

この Stratonovich 方程式に対応する Itô 型方程式は

$$X(t;s,x) = x + \int_s^t \sigma(r, X(r;s,x))dB_r + \int_s^t b(r, X(r;s,x))dr, \qquad t \in [s,T].$$

であるとする。$X^{(h)}(t)$, $k = 0, 1, \cdots, K_n$, $n = 0, 1, \cdots, N-1$ が $X(t;0,x_0)$ を Euler-丸山法で近似した確率過程で、以下で与えられたものである。

$$X^{(h)}(0) = x_0,$$
$$X^{(h)}(t+h) = X^{(h)}(t) + b(t, X^{(h)}(t))h + \sigma(t, X^{(h)}(t))(B_{t+h} - B_t).$$

$C_b(\mathbb{R}^{\mathbb{D}})$ 上の operator P_t を $P_t f(x) = E[f(X(t;0,x))]$ で定義する。$N \geq 2$ は整数とする。行使時刻が T_n, $n = 0, 1, \cdots, N$, である Bermuda type derivative を考える。$\{T_n, T_{n+1}, \cdots, T_N\}$ に値を取る $\mathcal{F}_t-$ 停止時刻の集合を $\mathcal{S}_n$、$n = 0, 1, \cdots, N$ とする。そして、この Bermuda option の value functions は次のように与えられる。

$$v_n(x) = \sup\{E[g(\tau, X(\tau; T_n, x))]; \tau \in \mathcal{S}_n\}, \qquad n = 0, 1, \cdots, N. \tag{2}$$

$\widetilde{\Omega} = W^{\mathbb{N}^2}$, $\widetilde{P} = \mu^{\otimes\infty^2}$ とする. 確率空間 $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{B}(\widetilde{\Omega}), \widetilde{P})$ では、独立な Brownian 運動が取れる。まず確率変数 $Z_{n,l} : \widetilde{\Omega} \to W$, $n, l = 1, 2, \cdots,$ を $Z_{n,l}(\{w_1\}, \{w_2\}, \cdots) = w_{n,l}$, により定義すると、これらは独立な Wiener 過程となる. さらに、これらの Wiener 過程に用い、各 n に対して、Euler-丸山法で次のように、L_n 個 sample path $X_{n,l}(m,k), k = 0, \cdots, K_m, m = 0, 1, \cdots, N-1, l = 0, 1, \cdots, L_n$ を発生させる。

$$X_{n,l}(0,0) = x_0$$
$$X_{n,l}(m+1, 0) = X_{n,l}(m, K_m)$$
$$X_{n,l}(m+1, k+1) = X_{n,l}(m,k) + b(T_m + kh, X_{n,l}(m,k))h$$
$$+ \sigma(T_m + kh, X_{n,l}(m,k))(Z_{n,l}(T_m + (k+1)h) - Z_{n,l}(T_m; kh))$$

ただし、$h > 0$, $K_m = (T_{m+1} - T_m)/h$ である。次に sample path を使って、Bermuda option の value function を近似する。$u_N(x) = v_N(x)$ は既にあたえている。$u_N(x), \cdots, u_{n+1}(x)$ は既に求められていると仮定して、$\{\tilde{a}_{n,p}, p = 1, 2, \cdots, P_n\}, \{\tilde{b}_{n,q,i},\ q = 1, 2, \cdots, Q_n,\ i = 1, 2, \cdots, d\}$

は次の２次関数の最小点であると仮定する。

$$\tilde{F}_n(\{a_{n,p}\}_{p=1}^{P_n}, \{b_{n,q,i}\}_{q=1}^{Q_n}) = \frac{1}{L_n}\sum_{l=1}^{L_n}|u_{n+1}(X_{n,l}(n+1,0)) - \sum_{p=1}^{P_n} a_{n,p}\psi_{n,p}(X_{n,l}(n,0))$$
$$-\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=0}^{K_n-1}\sum_{q=1}^{Q_n} b_{n,q,i}\phi(T_n+kh, X_{n,l}(n,k))(Z_{n,l}^i(T_n+(k+1)h) - Z_{n,l}^i(T_n+kh))|^2.$$

$u_n(x) = \sum_{p=1}^{P_n}\tilde{a}_{n,p}\psi(x)\vee g(T_n,x)$ と帰納的に定義する. $\sum_{q=1}^{Q_n} b_{n,q,i}\phi(T_{n+1}-t,x)$ が $V_iP_{T_{n+1}-t}v_{n+1}(x)$ の近似と見なせる。この論文の主要的な結論は以下である。

定理 1. $l=1,2,\cdots,L$, $n=0,1,\cdots,N$ に対し、

$$M_l(n) = \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{K_m-1}\sum_{q-1}^{Q_m}\sum_{i=1}^{d}\tilde{b}_{m,q,i}\phi_{m,q}(T_m+kh, X_{N+1,l}(m,k))(Z_{N+1,l}(T_m+(k+1)h) - Z_{N+1,l}(T_m+kh)). \tag{3}$$

とおく。$E = \inf_{a,b}\sum_{n=0}^{N-1}(E_n^1(v,\{a_{n,p}\})^{1/2} + E_n^2(v,\{b_{n,q,i}\})^{1/2})$

としておく、$E_n^1(v,\{a_{n,p}\}) = E[|(P_{T_{n+1}-T_n}v)(X(T_n;0,x_0)) - \sum_{p=1}^{P_n} a_{n,p}\psi_{n,p}(X^{(h)}(T_n))|^2]$,

$$E_n^2(v,\{b_{n,q,i}\}) = E[|\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=0}^{K_n-1}(V_iP_{(K_n-k)h}v)(X^{(h)}(T_n+kh))\Delta B^i(T_n+kh)$$
$$-\sum_{q=1}^{Q_n} b_{n,q,i}\phi_{n,q}(T_n+kh, X^{(h)}(T_n+kh)\Delta B^i(T_n+kh)|^2].$$

h に依らない定数 C があって, つぎの不等式が成立する。

$$E^{\tilde{P}}[|\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\max_{0\le n\le N-1}\{g(T_n, X_{N+1,l}(n,0)) - M_n(l)\} - v_0(x_0)|^2]^{1/2}$$
$$\le C\Big\{E + (h\log(\frac{1}{h}))^{1/2} + \frac{1}{L^{1/2}} + \sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{L_n^{1/2}}\Big\}.$$

さらに、この論文が次の内容も含めている。第３章では、この計算方法を使って近似数値計算のアルゴリズムを紹介した後、一つの証券を原資産とする Bermuda option に関する数値計算の例を与えた。第４章では、２次元 Gaussian 分布　$A = \{(x,y):\ \cos\alpha x + \sin\alpha y \le a,\ \cos\beta x + \sin\beta y \le b\}$ での分布を多項式で近似計算する公式を与え、誤差も評価した。第５章では、企業の規模分布が Pareto 分布に従うと言う経験的事実を理論的に説明する確率モデルを与え、佐藤のアイデアに従って、厳密にこの事実を証明した。