論文審査の結果の要旨

氏名　張 娜

本論文ではバミューダデリバティブの価格をモンテカルロ法で計算する新しい計算法を考案し、その真の値との誤差の数学的評価を与えている。

今、$W = C([0,\infty);\mathbf{R}^d)$ 、 $\mathcal{B}(W)$ はボレル代数、μ は $(W, \mathcal{B}(W))$ 上のウィナー測度、$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ は自然なフィルトレーションとする。$\sigma : \mathbf{R}^D \to \mathbf{R}^D \otimes \mathbf{R}^d$, $b : \mathbf{R}^D \to \mathbf{R}^D$ は滑らかな関数、$X(t; s, x)$, $t \geq s \geq 0$, $x \in \mathbf{R}^D$ は確率微分方程式

$$X(t;s,x) = x + \sum_{i=1}^{d} \int_s^t \sigma(X(r;s,x))dw^i(r) + \int_s^t b(X(r;s,x))dr$$

の解とする。$P_t f(x) = E^\mu[f(X(t;0,x))]$ により線形作用素 P_t, $t \geq 0$, を定める。

$T_0, T_1, \ldots, T_N$ は　$0 = T_0 < T_1 < \ldots < T_N$ となる整数、$g : \{T_0, \ldots, T_N\} \times \mathbf{R}^D$ はリプシッツ連続な関数 とし、

$$v_n(x) = \sup\{E[g(\tau, X(\tau; T_n, x))];\ \tau \text{ は停止時刻で } \tau(w) \in \{T_n, \ldots, T_N\}, w \in W\}$$

とおく。バミューダデリバティブの価格を求めることは、数学的には、与えられた $x_0 \in \mathbf{R}^D$ に対して $v_0(x_0)$ を求めることである。値関数 v_n は以下のように帰納的に与えられる。

$$v_N(x) = g(T_N, x), \qquad v_{n-1}(x) = \max\{g(T_n, x), P_{T_n - T_{n-1}} v_n(x)\}, n = N, N-1, \ldots, 1$$

しかし、D が大きい場合は関数を記憶することは困難であるため、モンテカルロ法による解法の研究が従来よりなされていた。その一つに、モンテカルロ法を使って最小自乗法で値関数を関数系の線形和で近似し、最適停止時刻 τ_0 の形を推測し、その推定停止時刻 $\hat{\tau}_0$ に対して、$E^\mu[g(\hat{\tau}_0, X(\hat{\tau}_0; 0, x_0))]$ を再びモンテカルロ法で計算し、$v_0(x_0)$ を推測するという方法がある。この方法は原理的には $v_0(x_0)$ の下限を与えるものである。一方、Rogers は

$$v_0(x_0) = \inf\{E^\mu[\max_{n=0,\ldots,N}(g(T_n, X(T_n, x_0)) - M_{T_n};$$
$$M_t \text{ は } M_0 = 0 \text{ を満たすマルチンゲール}\}$$

という事実を用いて $v_0(x_0)$ を推定するという方法を考えた。この方法では $v_0(x_0)$ の上限が与えられる。この方法を用いるには、最適なマルチンゲール M_t をどのように推定するかという問題が起こるが、Rogers は例のみを与え、一般的な方法は与えなかった。

本論文では、モンテカルロ法と最小自乗法を用いて M_t を求める方法を提案し、その有効性を数学的に調べたものである。その数学的定式化を以下に述べる。

$\Omega = W^{\{0,1,\dots,N\}\times\mathbf{N}}$, $P = \mu^{\{0,1,\dots,N\}\times\mathbf{N}}$, $Z_{k,\ell} : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbf{R}^d$, $k = 0,1,\dots,N$, $\ell = 1,2,\dots,$ を $Z_{k,\ell}(t,\{w_{m,n}\}) = w_{k,\ell}(t)$ で定める。h は $1/h$ が自然数となる正数とする。$X_{k,\ell}^{(h)} : [0,\infty)\times\Omega \to \mathbf{R}^D$ を

$$X_{k,\ell}^{(h)}(0) = x_0,$$

$$X_{k,\ell}^{(h)}(t) = X_{k,\ell}^{(h)}(nh) + \sigma(X_{k,\ell}^{(h)}(nh))(Z_{k,\ell}(t) - Z_{k,\ell}(nh)) + b(X_{k,\ell}^{(h)}(nh))(t-nh)$$

$t \in (nh,(n+1)h]$, $n = 0,1,\dots,$ により帰納的に定義する。これはオイラー・丸山近似である。

関数系 $\psi_{n,r} : \mathbf{R}^D \to \mathbf{R}$, $n = 1,\dots,N$, $r = 1,\dots,R_n$, $\varphi_{n,q} : [T_{n-1},T_n]\times\mathbf{R}^D \to \mathbf{R}^d$, $n = 1,\dots,N$, $q = 1,\dots,Q_n$, および $L_n \in \mathbf{N}$, $n = 0,1,\dots,N$, が与えられたものとする。

$K_n = (T_n - T_{n-1})/h$, $n = 1,\dots,N$, とおく。$u_N = g(T_N,\cdot)$ と定義し、$u_n : \mathbf{R}\times\Omega \to \mathbf{R}$ が与えられたとき、

$$F_n(\{a_{n,r}\},\{b_n,q\}) = \sum_{\ell=1}^{L_n}\{u_n(X_{n,\ell}^{(h)}(T_n)) - \sum_{r=1}^{R_n} a_{n,r}\psi_{n,r}(X_{n,\ell}^{(h)}(T_{n-1}))$$

$$-\sum_{q=1}^{Q_n}\sum_{k=1}^{K_n} b_{n,q}\varphi_{n,q}(X_{n,\ell}(T_{n-1}+(k-1)h))(Z_{n,\ell}(T_{n-1}+kh) - Z_{n,\ell}(T_{n-1}+(k-1)h))\}^2$$

とおき、 $\{\tilde{a}_{n,r}\}_{r=1,\dots,R_n}$, $\{\tilde{b}_{n,q}\}_{q=1,\dots,Q_n}$ は $F_n(\{a_{n,r}\},\{b_{n,q}\})$ の最小点とし

$$u_{n-1}(x) = \max\{\sum_{r=1}^{R_n}\tilde{a}_{n,r}\psi(x), g(T_{n-1},x)\}$$

とおく。このようにして、 u_n, $\{\tilde{a}_{n,r}\}_{r=1,\dots,R_n}$, $\{\tilde{b}_{n,q}\}_{q=1,\dots,Q_n}$, を帰納的に定義していく。最後に、

$$M_\ell(T_n) = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{K_m}\tilde{b}_{m,q}\varphi_{n,q}(X_{0,\ell}(T_{n-1}+(k-1)h))(Z_{0,\ell}(T_{n-1}+kh) - Z_{0,\ell}(T_{n-1}+(k-1)h))$$

$\ell = 1,\dots,L_0$, とおく。論文では以下のことが証明されている。

定理 $E_{n,i}$, $n = 1,\dots,N$, $i = 0,1$, を

$$E_{n,0} = \inf_{\{a_r\}} E[\{P_{T_n - T_{n-1}}v_n)(X_{0,1}^{(h)}(T_{n-1})) - - \sum_{r=1}^{R_n} a_r\psi_{n,r}(X_{0,1}^{(h)}(T_{n-1}))\}^2]^{1/2},$$

$$E_{n,1} = \inf_{\{b_q\}} E[\{\sum_{k=1}^{K_n} V_i P_{T_n-T_{n-1}}v_n)(X_{0,1}^{(h)}(T_{n-1}))(Z_{0,1}^i(T_{n-1}+kh) - Z_{n,\ell}^i(T_{n-1}+(k-1)h))$$

$$-\sum_{q=1}^{Q_n}\sum_{k=1}^{K_n} b_q\varphi_{n,q}(X_{0,1}(T_{n-1}+(k-1)h))(Z_{0,1}(T_{n-1}+kh) - Z_{0,1}(T_{n-1}+(k-1)h))\}^2]^{1/2}$$

とおく。ただし、 $V_i = \sum_{j=1}^N \sigma_{j,i}\frac{\partial}{\partial x^j}$ である。

この時、(UFG) 条件の下で、定数 $C > 0$ が存在し、

$$E[|\{\frac{1}{L_0}\sum_{\ell=1}^{L_0}\max_{n=0,1,\ldots,N}(g(T_n, X_{0,\ell}^{(h)}(T_n))\} - M_\ell(T_n)) - v_0(x_0)|^2 \wedge 1]^{1/2}$$

$$\leq C\{\sum_{n=1}^{N}(E_{n,0} + E_{n,1}) + (h\log(\frac{1}{h}))^{1/2} + \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{L_n^{1/2}}\}$$

が成立する。

この定理により、$P_T v_n$ や $V_i P_T v_n$ を線形和でよく近似できるような関数系を選ぶことができれば、h を十分小さくとり L_n, $n = 0, 1, \ldots, N$, を十分大きくとれば、$v_0(x_0)$ を Rogers の方法に沿って十分近似できることがわかる。

論文では数値実験結果も示されている。さらに、良い関数系をどう与えるべきかも論文では調べられている。

また、論文では会社のサイズの成長モデルについても論じている。

このように本論文ではバミューダデリバティブの価格計算について新しい方法を打ち出し、一般の場合に適用できるアルゴリズムを与えることに成功しており、高く評価できるものである。

よって、論文提出者　張 娜　は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。