論文内容の要旨

論文題目: Inverse spectral problems for a nonsymmetric differential operator and applications

(非対称な常微分作用素に対する逆スペクトル問題とその応用)

氏名：寧　呉慶

本論文では, 非対称な常微分作用素に対する逆スペクトル問題に関する一意性, 再構成, 安定性を考察し, さらに減衰項を持つ波動方程式の初期境界値問題に対する逆問題への応用を考えた。

非対称な常微分作用素

$$A_P = B\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} + P(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} + \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}$$

に対する固有値問題を考える。但し $P(x)$ は一回連続的微分可能な複素数値行列関数である。この固有値問題は様々な振動現象（電信方程式, 粘性抵抗付き弦の振動）を記述しており, 時間に依存しない一次元の Dirac 方程式も A_P であらわすことができる。

逆スペクトル問題はスペクトルに関するデータから作用素を決定することであり, 研究が数多くなされてきた。しかしこれまでの研究は自己共役微分作用素に集中している。例えば, I. M. Gel'fand, B. M. Levitan, V.A. Marchenko, B. Simon らによる Sturm-Liouville 問題と Dirac 問題に対する逆スペクトル理論に関する成果がある。本論文においては Gel'fand-Levitan 理論の一般化として, 非対称な常微分作用素に対する逆スペクトル問題を考察した。

本論文は５章からなり, 以下章ごとに主要結果を述べる。

第１章で次の固有値問題を考えた。

$$\begin{cases} A_{P,\mu,\nu}\varphi = \lambda\varphi, \ 0 < x < 1, \\ \\ \varphi^{(2)}(0)\cosh\mu - \varphi^{(1)}(0)\sinh\mu = \varphi^{(2)}(1)\cosh\nu + \varphi^{(1)}(1)\sinh\nu = 0. \end{cases} \tag{1}$$

以下 $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^{(1)}(x) \\ \varphi^{(2)}(x) \end{pmatrix}$ とおく。 $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ は定数であり, $A_{P,\mu,\nu}$ は $A_{P,\mu,\nu}\varphi = A_P\varphi$ で定義し, 定義域

$$\begin{aligned} D(A_{P,\mu,\nu}) = \{\varphi \in \left(H^1(0,1)\right)^2 : &\varphi^{(2)}(0)\cosh\mu - \varphi^{(1)}(0)\sinh\mu = 0, \\ &\varphi^{(2)}(1)\cosh\nu + \varphi^{(1)}(1)\sinh\nu = 0\} \end{aligned}$$

を持つ非対称な常微分作用素である。$\sigma(A_{P,\mu,\nu}) = \{\lambda^i\}_{1\le i\le N} \bigcup \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ とあらわされることが知られている。問題（1）におけるスペクトル特性 $S(P,\mu,\nu)$ を次のように定義する：

$$S(P,\mu,\nu) = \left\{\lambda^i, m_i, \rho^i, \boldsymbol{\alpha}^i\right\}_{1\le i\le N} \bigcup \left\{\lambda_n, \rho_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

ただし $m_i \geq 2$ は固有値 λ^i の代数重複度で, ρ^i は $A_{P,\mu,\nu}$ と $A_{P,\mu,\nu}$ の共役作用素 $A^*_{P,\mu,\nu}$ の定められた方法で選ばれた一般化固有ベクトルの $(L^2(0,1))^2$ でのスカラー積であり, ρ_n は $A_{P,\mu,\nu}$ と $A^*_{P,\mu,\nu}$ の固有ベクトルのスカラー積である。また, $\boldsymbol{\alpha}^i = (\alpha^i_1, \cdots, \alpha^i_{m_i-1})$ は $m_i - 1$ 次のベクトルで, その成分は $A_{P,\mu,\nu}$ と $A^*_{P,\mu,\nu}$ の一般化固有ベクトルから定められる。ここで $\rho^i, \rho_n, \boldsymbol{\alpha}^i$ の定め方は本文の記述 (第一章の式 (1.2.13) の所, その付録式 (2)(5)(10)(12)(13)(16)) にゆずる。

結果を説明するため, いくつかの記号を導入する。

$$C(y,\lambda) = \int_0^y S(t,\lambda)\mathrm{d}t, \quad C_{(j)}(y,\lambda^i) = \int_0^y S_{(j)}(t,\lambda^i)\mathrm{d}t, \ i,j \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

$$C^*(x,\overline{\lambda}) = \int_0^x S^*(t,\overline{\lambda})\mathrm{d}t, \quad C^*_{(j)}(x,\overline{\lambda^i}) = \int_0^x S^*_{(j)}(t,\overline{\lambda^i})\mathrm{d}t. \tag{3}$$

とおく。ここで

$$S(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \cosh(\lambda x + \mu) \\ \sinh(\lambda x + \mu) \end{pmatrix}, \quad S^*(x,\overline{\lambda}) = \begin{pmatrix} \cosh(\overline{\lambda} x + \overline{\mu}) \\ -\sinh(\overline{\lambda} x + \overline{\mu}) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$S_{(j)}(x,\lambda^i) = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{j-1} \frac{x^k}{k!}\gamma_k(x,\lambda^i,\mu) \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{j-1} \frac{x^k}{k!}\delta_k(x,\lambda^i,\mu) \end{pmatrix}, \ S^*_{(j)}(x,\overline{\lambda^i}) = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=j}^{m_i} \overline{\alpha^i_k}\frac{x^{k-j}}{(k-j)!}\gamma_{k-j}(x,\overline{\lambda^i},\overline{\mu}) \\ \displaystyle -\sum_{k=j}^{m_i} \overline{\alpha^i_k}\frac{x^{k-j}}{(k-j)!}\delta_{k-j}(x,\overline{\lambda^i},\overline{\mu}) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

ただし $\overline{\alpha}$ は $\alpha \in \mathbb{C}$ の共役複素数であり,

$$\alpha^i_{m_i} = 1, \ \gamma_k(x,\lambda,\mu) = \begin{cases} \cosh(\lambda x + \mu), & k \ \text{ even} \\ \sinh(\lambda x + \mu), & k \ \text{ odd} \end{cases}, \quad \delta_k(x,\lambda,\mu) = \begin{cases} \sinh(\lambda x + \mu), & k \ \text{ even} \\ \cosh(\lambda x + \mu), & k \ \text{ odd} \end{cases}$$

とおく。さらに $(x,y) \in [0,1]^2$ に対して行列関数 $f(x,y), F(x,y)$ を

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{\overline{C^*_{(j)}(x,\overline{\lambda^i})}C^T_{(j)}(y,\lambda^i)}{\rho^i} \\ &\quad + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{\overline{C^*(x,\overline{\lambda_n})}C^T(y,\lambda_n)}{\rho_n} - \overline{C^*(x,\overline{\mu_n})}C^T(y,\mu_n) \right\}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$F(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \tag{7}$$

で形式的に定義する。但し $\cdot^T$ は転置行列をあらわし, $\nu_0 \in \mathbb{C}$ として $\sigma(A_{0,\mu,\nu_0}) = \{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mu_n = n\pi\sqrt{-1} - \mu - \nu_0$ とおいた。

定理 1.1. $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ u & v \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ u & v \end{pmatrix} \in \left(C^1[0,1]\right)^4$ とする。このとき, $S(P,\mu,\nu) = S(Q,\mu,\nu)$ が成立すれば, $P \equiv Q$ が成り立つ。

以下

$$\Omega = \{(x,y) \in (0,1)^2 : 0 < y < x < 1\}$$

とする。

定理 1.2. $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ u & v \end{pmatrix} \in \left(C^1[0,1]\right)^4$ とする。このとき, 式 (2)–(7) で定義される $F(x,y)$ は $\left(C^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)^4$, $\left(C^1\left(\overline{(0,1)^2 \setminus \Omega}\right)\right)^4$ に属し, 次の積分方程式

$$F(x,y) + M(x,y) + \int_0^x M(x,\tau)F(\tau,y)\mathrm{d}\tau = 0,\ (x,y) \in \overline{\Omega}$$

は唯一の解 $M = (M_{kl})_{1\le k,l\le 2} \in \left(C^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)^4$ を持つ。さらに $0 \le x \le 1$ に対して次が成立する。

$$2(M_{12}-M_{21})(x,x) = (v-p_1)(x)\cosh\left(\int_0^x (p_1+v)(s)\mathrm{d}s\right) + (p_2-u)(x)\sinh\left(\int_0^x (p_1+v)(s)\mathrm{d}s\right),$$

$$2(M_{11}-M_{22})(x,x) = (v-p_1)(x)\sinh\left(\int_0^x (p_1+v)(s)\mathrm{d}s\right) + (p_2-u)(x)\cosh\left(\int_0^x (p_1+v)(s)\mathrm{d}s\right).$$

定理 1.1 と定理 1.2 はスペクトル特性から A_P を決定する際の一意性と再構成法をそれぞれ与えている。特に定理 1.2 は非対称な常微分作用素に関して Gel'fand-Levitan 理論に対応する結果を与えている。

第 2 章では第 1 章の再構成の安定性を調べた。以下常に P と P_0 の二行目の横ベクトルは一致していると仮定する。$\vartheta = 0,1$ として $\|\cdot\|_{C^\vartheta}$ は $[0,1]$ での C^ϑ-ノルムをあらわすものとする。

定理 2.1. P_0 と P を $(C^1[0,1])^4$ の有界な集合に含まれ, かつ $\int_0^1 \mathrm{tr}P_0(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 \mathrm{tr}P(s)\mathrm{d}s = 0$ とする。スペクトル特性をそれぞれ $S(P_0,\mu,\nu) = \left\{\lambda_0^i, m_i, \rho_0^i, \boldsymbol{\alpha}_0^i\right\}_{1\le i\le N} \bigcup \left\{\lambda_n^0, \rho_n^0\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ と $S(P,\mu,\nu) = \left\{\lambda^i, m_i, \rho^i, \boldsymbol{\alpha}^i\right\}_{1\le i\le N}$ $\bigcup \{\lambda_n, \rho_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ とする。$\sum_{i=1}^N (|\lambda^i - \lambda_0^i|^2 + |\rho^i - \rho_0^i|^2) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i-1} |\alpha_j^i - (\alpha_j^i)_0|^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} (|\lambda_n - \lambda_n^0|^2 + |\rho_n - \rho_n^0|^2)$ が十分小さくなると仮定する。 このとき, ある定数 $C > 0$ が存在して, $\vartheta = 0,1$ に対し

$$\|P - P_0\|_{C^\vartheta}$$

$$\le C\left\{\sum_{i=1}^N (|\lambda^i - \lambda_0^i| + |\rho^i - \rho_0^i|) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i-1} |\alpha_j^i - (\alpha_j^i)_0| + \sum_{n\in\mathbb{Z}} (|n|+1)^\vartheta (|\lambda_n - \lambda_n^0| + |\rho_n - \rho_n^0|)\right\}$$

が成り立つ。

定理 2.2. 定理 2.1 において $\int_0^1 \mathrm{tr}P_0(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 \mathrm{tr}P(s)\mathrm{d}s = 0$ 以外の仮定をおく。ある定数 $C > 0$ が存在して, $\vartheta = 0,1$ に対し

$$\|P - P_0\|_{C^\vartheta}$$

$$\le |\lim_{k\to\infty}(\lambda_k - \lambda_k^0)| + C\left\{\sum_{i=1}^N (|\widetilde{\delta}_i| + |\rho^i - \rho_0^i|) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i-1} |\alpha_j^i - (\alpha_j^i)_0| + \sum_{n\in\mathbb{Z}} (|n|+1)^\vartheta (|\widetilde{\gamma}_n| + |\rho_n - \rho_n^0|)\right\}$$

となる。ただし $\widetilde{\delta}_i = \lambda^i - \lambda_0^i - \lim_{k\to\infty}(\lambda_k - \lambda_k^0)$, $\widetilde{\gamma}_n = \lambda_n - \lambda_n^0 - \lim_{k\to\infty}(\lambda_k - \lambda_k^0)$。

第３章において適当な条件を満たす与えられたデータから再構成された固有値問題 (1) のスペクトル特性が与えられたデータと一致することを示した。結果は次である。

定理 3.1. $\left\{\lambda^i, m_i, \rho^i, \boldsymbol{\alpha}^i\right\}_{1\le i\le N} \bigcup \{\lambda_n, \rho_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が $p_{21}(x), p_{22}(x), \mu$ を既知として (1) のような固有値問題に対応するスペクトル特性となる必要十分条件は次の **A1** と **A2** である：

A1.

(i) λ_n と ρ_n が次のような漸近挙動を持つ:

$$\lambda_n = a_0 + n\pi\sqrt{-1} + O(\frac{1}{n}), \quad \rho_n = 1 + O(\frac{1}{n}) \ \ (|n| \to \infty).$$

ここで a_0 は定数である。

(ii) $n \in \mathbb{Z}, 1 \le i \le N$ に対して $\rho_n \neq 0$, $\rho^i \neq 0$, $\mathbb{N} \ni m_i \ge 2$.

A2. $F(x,y)$ が式 (2)–(7) で定義されるものとすると，$F \in \left(C^1(\overline{\Omega})\right)^4$, $\in \left(C^1\left(\overline{(0,1)^2 \setminus \Omega}\right)\right)^4$ であって $x \in [0,1]$ に対し $F^T(0,x)B\xi = F(x,0)B\eta = 0$。ここで $\xi = (\cosh\mu \ \ \sinh\mu)^T$, $\eta = (\cosh\mu \ \ -\sinh\mu)^T$ とおいた。

第４章において第３章までに得られた結果を利用して, 減衰項を持つ波動方程式の二つの係数を境界観測データから再構成する問題を研究した。減衰項を含まない波動方程式に対する再構成問題は Blagoveshchenskij によって解決されていたが, 減衰項がある場合は対応する作用素が非対称であって困難な問題となり, 未解決の問題であった。次の初期値境界値問題を考える。

$$\begin{cases} L_p u(x,t) = 0, \ \ 0 < x < 1, -T < t < T, \\[2ex] u(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \delta(x), \quad 0 \le x \le 1, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \quad -T \le t \le T \end{cases}$$

ただし作用素 L_p は

$$L_p = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - p_1(x)\frac{\partial}{\partial t} - p_2(x)\frac{\partial}{\partial x}$$

である。ここで $T \ge 2$ として, p_1, p_2 は複素数値関数で $p_1, p_2 \in C^1[0,1]$, $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である。

定理 4.1. $v(t) = u(0,t)$, $-T \le t \le T$ とおく。超関数 $\mathcal{D}'((0,1)^2)$ の意味で $v(x+y), v(x-y), v(-x+y)$ 及び $v(-x-y)$ の x についての偏微分を $\frac{\partial}{\partial x}$ とあらわす。さらに $V(x,y) := (V_{kl}(x,y))_{1\le k,l\le 2}$ を次のように定義する:

$$V_{11}(x,y) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial v(x+y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x-y)}{\partial x} - \frac{\partial v(-x+y)}{\partial x} - \frac{\partial v(-x-y)}{\partial x}\right) - \delta(x-y),$$

$$V_{12}(x,y) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial v(x+y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x-y)}{\partial x} - \frac{\partial v(-x+y)}{\partial x} + \frac{\partial v(-x-y)}{\partial x}\right),$$

$$V_{21}(x,y) = \frac{1}{4}\left(-\frac{\partial v(x+y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x-y)}{\partial x} - \frac{\partial v(-x+y)}{\partial x} - \frac{\partial v(-x-y)}{\partial x}\right),$$

$$V_{22}(x,y) = \frac{1}{4}\left(-\frac{\partial v(x+y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x-y)}{\partial x} - \frac{\partial v(-x+y)}{\partial x} + \frac{\partial v(-x-y)}{\partial x}\right) - \delta(x-y).$$

このとき, $V \in \left(C^1(\overline{\Omega})\right)^4$ かつ $V \in \left(C^1\left(\overline{(0,1)^2 \backslash \Omega}\right)\right)^4$ である。しかも, 積分方程式

$$V(x,y) + M(x,y) + \int_0^x M(x,\tau)V(\tau,y)\mathrm{d}\tau = 0,\ (x,y) \in \overline{\Omega}$$

は $0 \leq x \leq 1$ に対して次の関係

$$2(M_{12} - M_{21})(x,x) = -p_1(x)\cosh\left(\int_0^x p_1(s)\mathrm{d}s\right) + p_2(x)\sinh\left(\int_0^x p_1(s)\mathrm{d}s\right),$$

$$2(M_{11} - M_{22})(x,x) = -p_1(x)\sinh\left(\int_0^x p_1(s)\mathrm{d}s\right) + p_2(x)\cosh\left(\int_0^x p_1(s)\mathrm{d}s\right)$$

を満たす唯一の解 $M = (M_{kl})_{1\leq k,l\leq 2} \in \left(C^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)^4$ を持つ。

第5章では $[0,\infty)$ で作用素 A_P を考えた場合にスペクトル関数の存在を示した。区間 $[0,1]$ で考えた場合と異なり, この場合にスペクトル関数は一般に測度とならず, ある線形位相空間上の連続線形汎関数である。

$\mathbb{K}^2(0,\infty) = \{a \in L^2(0,\infty) : a$ の台が $(0,\infty)$ でコンパクト $\}$ とおく。 整関数 $e(\rho)$ は $e(\rho)$ に依存する定数 C と σ が存在して $|e(\rho)| \leq C\exp(\sigma|\mathrm{Im}\rho|)$ $(\rho \in \mathbb{C})$ が成り立つとき, 指数型整関数と呼ぶ。Z を実直線で積分可能な指数型整関数の集合から構成される線形位相空間とし, Z' を Z 上の線形連続汎関数の集合とする。$P(x) \in \left(C^1[0,\infty)\right)^4$ が $BP(x) = P(x)B$ を満たすとして P と $\mu \in \mathbb{C}$ に対して次の境界値問題を考える。

$$\begin{cases} B\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x) + P(x)\varphi(x) = \lambda\varphi(x),\ 0 < x < \infty, \\ \\ \varphi(0) = \begin{pmatrix} \cosh\mu & \sinh\mu \\ \sinh\mu & \cosh\mu \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{8}$$

ここで $\varphi = (\varphi_{[1]} \quad \varphi_{[2]})$,

$$\varphi_{[1]}(\cdot,\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_{[1]}^{(1)} \\ \\ \varphi_{[1]}^{(2)} \end{pmatrix},\ \varphi_{[2]}(\cdot,\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_{[2]}^{(1)} \\ \\ \varphi_{[2]}^{(2)} \end{pmatrix}$$

とおいた。φ^{-1} の存在を示すことができるので $\varphi^{-1} = (\psi_{[1]}(\cdot,\lambda) \quad \psi_{[2]}(\cdot,\lambda))$ とおく。いま, $f = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{pmatrix} \in \left(\mathbb{K}^2(0,\infty)\right)^2$, $g = \begin{pmatrix} g^{(1)} \\ g^{(2)} \end{pmatrix} \in \left(\mathbb{K}^2(0,\infty)\right)^2$ に対し,

$$\omega_f^k(\rho) = \int_0^\infty f^T(x)\psi_{[k]}(x,\sqrt{-1}\rho)\mathrm{d}x,\ \widetilde{\omega}_g^k(\rho) = \int_0^\infty \varphi_{[k]}^T(x,\sqrt{-1}\rho)\overline{g(x)}\mathrm{d}x,\ \rho \in \mathbb{R},\ k = 1,2$$

とおく。このとき次の定理を証明した。

定理 5.1. 問題 (8) に対応する $D = (D_{jm})_{1\leq j,m\leq 2}, D_{jm} \in Z'$ が存在してすべての $f, g \in \left(\mathbb{K}^2(0,\infty)\right)^2$ に対し

$$\int_0^\infty f^T(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \sum_{j,m=1}^2 \int_{-\infty}^\infty D_{jm}(\rho)\omega_f^m(\rho)\widetilde{\omega}_g^j(\rho)\mathrm{d}\rho$$

となる。さらに, $\left(\mathbb{K}^2(0,\infty)\right)^2$ の収束の意味で

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j,m=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty} D_{jm}(\rho)\omega_f^m(\rho)\varphi_{[k]}(x,\sqrt{-1}\rho)\mathrm{d}\rho \\ &= \sum_{j,m=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty} D_{jm}(\rho)\widetilde{\omega}_f^j(\rho)\psi_{[m]}(x,\sqrt{-1}\rho)\mathrm{d}\rho \end{aligned}$$

が成り立つ。

$P = P(x)$ が $BP = PB$ を満たさない場合にも類似な結果も得られた。すなわちに 2×2 行列 R が $RB+BR=B$ かつ $R^2=R$ を満たすとして, $\rho\in\mathbb{R}$ とする。次の二つの境界値問題を考える。

$$\begin{cases} B\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x)+P(x)\varphi(x)=\lambda\varphi(x),\ 0<x<\infty, \\ \\ \varphi(0)=R \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}\widetilde{\varphi}}{\mathrm{d}x}(x)B+\widetilde{\varphi}(x)P(x)=\lambda\widetilde{\varphi}(x),\ 0<x<\infty, \\ \\ \widetilde{\varphi}(0)=R. \end{cases} \tag{10}$$

任意の $f,g\in\left(\mathbb{K}^2(0,\infty)\right)^4$ に対し,

$$\varphi_f(\rho)=\int_0^\infty f(x)\varphi(x,\sqrt{-1}\rho)\mathrm{d}x,\ \widetilde{\varphi}_g(\rho)=\int_0^\infty \widetilde{\varphi}(x,\sqrt{-1}\rho)g(x)\mathrm{d}x$$

とおくと次が成り立つ。

定理 5.2. 問題 (9) と (10) に対応して $D=RDR$ となる $D=(D_{kl})_{1\le k,l\le 2}\in(Z')^4$ が存在して, $f,g\in\left(\mathbb{K}^2(0,\infty)\right)^4$ に対し

$$\int_0^\infty f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_f(\rho)D(\rho)\widetilde{\varphi}_g(\rho)\mathrm{d}\rho$$

が成立する。さらに, $\left(\mathbb{K}^2(0,\infty)\right)^4$ の収束の意味で

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_f(\rho)D(\rho)\widetilde{\varphi}(x,\sqrt{-1}\rho)\mathrm{d}\rho=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\sqrt{-1}\rho)D(\rho)\widetilde{\varphi}_f(\rho)\mathrm{d}\rho.$$