# 論文の内容の要旨

論文題目　Analysis of the Entanglement Cost and Calculation of the Holevo Capacity
(エンタングルメントコストの解析とホレボ容量の計算)

氏　名　　下野 寿之

量子情報理論において量子もつれは本質的である。それ無しに量子計算は考えられず、また考案された量子テレポーテーション(1993 年)や superdense coding (1992 年)などの量子通信プロトコルはそれを利用したものである。本論文では、２体間の混合状態の量子もつれについての漸近的な性質（対象となる状態の単一の個体から直接分からないが、その状態の複製を多量に用意することで分かる性質）を追求するために、量子もつれの定量化及び量子もつれに関連してホレボ容量の計算について、研究を展開した。

量子もつれを定量化する方法はいくつか提案されているが、以下の２通りの考え方(共に1996 年)が主なものである。一つは、２体間上の状態ρが与えられたとき、N組（N→∞）のρを作り出すためにNの何倍の量のベル状態が必要であるかであり、$E_C(\rho)$と表される。もう一つは、N組（N→∞）のρからNの何倍のベル状態が取り出せるかを考え$E_D(\rho)$と表される。ここで状態を操作するために許されている操作はＬＯＣＣ（局所操作と古典通信）のみであると仮定してある。

一般のρに対して$E_C(\rho)$を計算できるとすれば、物の長さや重さが量れたことと同じくらい重要な意味を持つと考えられる。しかしながら、それを計算する数式で知られているもの(2001 年)は、entanglement of formation （以下、$E_F$ と書く）と呼ばれる最適化演算子を含む数式で表示されたものにさらに極限操作を加えたものなので、計算は二重に困難なように思われる。それでも、もしも$E_F$に加法性と呼ばれる性質が成り立てば$E_C$がいつでも$E_F$に一致するので、その困難を解決するための第一歩として$E_F$が加法的であるかどうかについて解決を試みた。本論文では、２準位系（以下、量子ビットと書く）２体の系以外において$E_F$を計算された例が乏しかった中、３準位系２体の系の反対称状態に着目した。その状態の$E_C$の下限値を計算し、３準位系２体の系の反対称状態２組に対する$E_F$の加法性を確かめた。

本研究がなされた当時、$E_F$が量子通信路のホレボ容量とMSW対応と呼ばれる関係で結びついたことを通じて、$E_F$の加法性とホレボ容量の加法性が同値であることが証明された(2003 年)。この結びつきは、一つの量子通信路からある対応によって導かれる量子状態について、その$E_F$がホレボ容量とフォンノイマンエントロピーの差で表されるというものである。こ

の対応を用いて、加法性が成り立つことが知られているユニタル量子ビット通信路から導かれる量子状態の$E_C$を、ホレボ容量から$E_F$を計算してそれが$E_C$に一致することを用いて計算できる。本論文では、先に定義した$E_D$の上限値が別の方法で計算できることを利用して、$E_C(\rho)$が真に$E_D(\rho)$より大きい場合があることを確かめた。このような$E_C$と$E_D$に差が生じるようなＬＯＣＣに不可逆性があることを示す例としては、３準位系２体の場合(1998 年)と２準位系２体の場合(2002 年)に続く例となった。

また、$E_F$の加法性が全ての場合で成り立つことと$E_F$のstrong superadditivityと呼ばれる不等式が全ての場合で成り立つことが同値であることが証明された(2003 年)。従って、この不等式に反例が存在したとすると、$E_F$の加法性が成り立たない場合があることを意味している。本研究では、自明でない最低の次元の場合、つまり２準位系の２体を２組含む系に対してこの不等式が成り立つかどうかを数値的に確かめた。この不等式にランダムに量子状態を代入することを 100 万回程度繰り返したり、不等式の両辺の差を目的関数としてその最小値を求める方法で量子状態を変えながら代入しその最小値を求めることを数十回繰り返したりしたが、いずれも反例は見つからなかった。結論としては、$E_F$の加法性はいつでも成り立っている、もしくは、反例が存在したとしても発見は難しい、と言える。

本研究の後半は量子ビット通信路のホレボ容量の計算に関するものである。先に記したように$E_F$の加法性とホレボ容量の加法性は同値である。従ってホレボ容量の加法性が破れる例が見つかれば、$E_F$の加法性の破れが証明されることになる。そのためにホレボ容量の加法性が破れる可能性があると思われた特殊な量子ビット通信路を発見することを試みた。その一つがホレボ容量を達成するために異なる入力状態を４個必要とする量子ビット通信路である。

まず最初に量子ビット通信路のホレボ容量を計算するためのアルゴリズムを開発した。ホレボ容量を表す式は、複数の量子状態とそれらの上の確率分布を引数とする目的関数の最大値として表される。この関数は、引数の量子状態に対して凸関数であり引数の確率分布に対して凹関数であるので、最適化計算を行った結果の局所最大値が真の最大値であることを保証することは一見困難なように思われる。これを回避するために、誤差を許容しながら凹関数の最大値を求める問題に置き換え、その許容誤差が０に収束していくような個々の問題を順次解いていく方法でホレボ容量を求めた。これによって、任意の量子ビット通信路のホレボ容量とその容量を達成する入力信号が求まるようになった。この計算方法を用いて４個の異なる入力状態を必要とする量子ビット通信路を発見し、その通信路２本に対してホレボ容量の加法性が破れていないかどうかを数値計算により確かめることを試みた。その結果として加法性が成り立つことを強く示す結果が得られた。