論文内容の要旨

論文題目：周期的刺激に誘起される古典揺らぎ萎縮

氏名： 田代 徹

パラメトリック振動子とは，調和振動子ポテンシャルの曲率が周期的に変化するもので，振動子を特徴付けるいくつかのパラメータの値により，振幅が時間とともに増大 (不安定)，または有限の値 (安定) に落ち着く．この現象は物理の様々な分野で見受けられるが，中でも最近最も注目されているのが Paul trap である．これはパラメトリック振動子の特徴を利用し，交流電圧を使ってある特定の比電荷をもつイオンのみを捕獲する手法である．比電荷がパラメトリック振動子の安定条件を満たすならば有限の振幅で振動を続けるが，条件を満たさない場合は振幅が増幅し続け，最終的には電極に衝突する．

Paul trap をそのまま用いた場合，イオンは熱 (運動エネルギー) を有するので，仮に安定条件を満たしていたとしても長い時間捕獲し続けるのは難しい．その解決策としてイオンを冷却する方法が開発されている．冷却の結果，イオンは装置の中心付近でほぼ静止するので長時間安定して捕獲することが出来，分光分析の実験装置や原子時計，量子コンピュータの実現の場としての応用範囲が広がる．

イオンの冷却法の一つとして，装置内部に中性気体を緩衝ガスとして入れることがある．ガスが標準状態程度のとき，イオンは大きい摩擦抵抗を受けると同時に，ガスから揺動力を受け，位置や速度が揺らぐ，つまりブラウン運動する．例えば分光実験を行う場合，この位置揺らぎが観測装置の光学的分解能よりも大きくなれば，大きな障害となる．

1993 年 Arnold 達によって，標準状態の N_2 を緩衝ガスとして込めた Paul trap の実験に関して，興味深い結果が発表された．彼らは帯電した球状のポリスチレンを捕獲した．十分時間が経った後で位置の揺らぎを測定してみると，それは交流電圧の振幅が増加するにつれて減少し，極小値を持つことが解った (我々はこの現象を古典揺らぎ萎縮と名付けた)．この極小値を観測装置の光学的分解能よりも小さくすることは可能なので，標準状態の緩衝ガスによる冷却法が分光実験をする上で有用であることが明らかになった．それに加え外場 (今の場合調和振動子ポテンシャル) の曲率の時間変化によってブラウン粒子の位置の揺らぎが減少するという興味深い事実が，実験的に示されたことになる．

これはあくまで経験的に得られた事実であり，この現象の一般的な性質を理論的に解明する研究の必要性は言うまでもない．しかし現在に至るまで，理論的なアプローチで取り組んだ研究は数が少なく，それらの研究にしてもパラメトリック振動子の周期関数として三角関数のみを扱っているに過ぎない．

こういった背景を踏まえ，より一般的な拡張に向けて，本研究に於いて以下のような問題を設定した.

- 一般の周期関数でもこの現象は起こるのか？
- 起こるための条件とは？
- 揺らぎ萎縮をより顕著にする周期関数とは？

これらの問題の答えを見つけるべく，この現象を，曲率が時間で周期変化する調和振動子ポテンシャルの影響下にあるブラウン粒子の統計的挙動とてモデル化した.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2}+\beta\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+\left[w+q\phi(t)\right]x(t)=f(t)\ ,$$

ここで $x(t)$ は荷電粒子の位置，β は粒子が受ける速度に比例した摩擦抵抗の係数を表す．また $\phi(t)$ は π の周期関数で，$f(t)$ はガウシアン白色ノイズ，即ち

$$\langle f(t)\rangle=0\ ,\quad \langle f(t_1)f(t_2)\rangle=2\epsilon\delta(t_1-t_2)\ ,$$

である．また位置，速度の揺らぎはそれぞれの分散 $\sigma_{x^2}(t)\equiv\langle x(t)^2\rangle-\langle x(t)\rangle^2$ ， $\sigma_{v^2}(t)\equiv\langle v(t)^2\rangle-\langle v(t)\rangle^2$ によって表す．本論分では特に長時間に於ける挙動に注目するが，それは初期条件の時刻 t_0 を十分過去にさかのぼることによって表現する：

$$\sigma^{\infty}_{x^2}(t)\equiv\lim_{t_0\to-\infty}\sigma_{x^2}(t)\ ,\quad \sigma^{\infty}_{v^2}(t)\equiv\lim_{t_0\to-\infty}\sigma_{v^2}(t)\ .$$

i) $\phi(t)$ が矩形波の場合

著者らは先ず周期関数 $\phi(t)$ として矩形波：

$$\phi(t)=\begin{cases}+1\ , & n\pi\le t<n\pi+T_1\\ -1\ , & n\pi+T_1\le t<(n+1)\pi\end{cases}\qquad (n\in\mathbf{Z}\ ,\ 0<T_1<\pi)$$

を採用し，揺らぎの挙動を詳細に調べた．矩形波は区分的に値が定数なので，長時間極限に於ける分散の厳密解を得ることに成功した．この結果から $\sigma^{\infty}_{x^2}(t)$，$\sigma^{\infty}_{v^2}(t)$ は π の周期性を有することが解った．更に速度の揺らぎ萎縮は起こらず，また位置の揺らぎ萎縮は矩形波の非対称さ，つまり $\gamma\equiv(\pi-T_1)/T_1$ の 1 からのずれに強く影響を受けることが明らかになった．より詳しく説明すると，$\gamma\le 1$ では揺らぎ萎縮が起こるが，$\gamma>1$ では起こらなくなる．具体例として $\beta=1$，$w=0.4$ のときの，長時間極限に於ける位置の揺らぎの時間平均

$$\overline{\sigma^{\infty}_{x^2}}\equiv\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}t\sigma^{\infty}_{x^2}(t)$$

の挙動を q の関数として Figure 1 に示した．$\gamma=1.2$ の場合は揺らぎは単調に増加しているが，$\gamma=1$，0.8 の場合は揺らぎは減少し，$q=0$ での揺らぎの値よりも小さくなることが解る．

ii) $\phi(t)$ が一般の周期関数の場合

続いて著者らは一般の周期関数に於ける揺らぎの挙動を調べた．先ず長時間極限に於ける分散を q の級数によって展開し，その全ての q^n の係数を解析的に求めることに成功した．この結果から一般の周期関数でも $\sigma^{\infty}_{x^2}(t)$，$\sigma^{\infty}_{v^2}(t)$ は π の周期性を有することが解った．それに加え，q が小さい領域で速度の揺らぎ萎縮は起こらず，位置の揺らぎ萎縮が起こるためには，$\phi(t)$ の Fourier 係数 c_n に対して $c_0\ge 0$ であることが必要，ただし $c_0=0$ の場合は揺らぎを萎縮するパラメータの値に制限があることが解った．

長時間極限に於ける揺らぎを q の級数で表すことが出来たが，実際に値を得るためには有限項でカットオフしなくてはならず，そのままでは値は不正確となる．そこで有限項の級数から連分数を使ってより正確な揺らぎの値を得る方法を提示した．例として $\phi(t)=2\cos 2t$ の場合について，時間平均した位置の揺

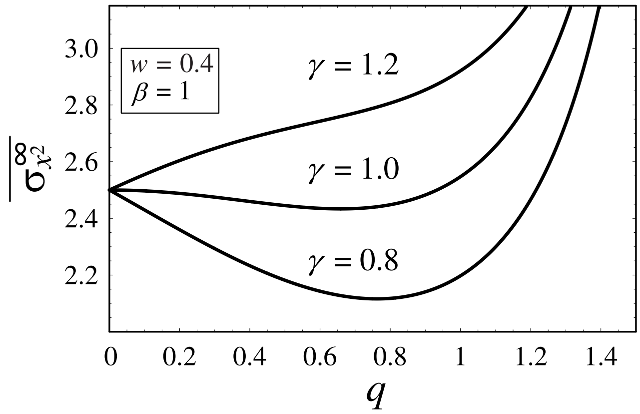

Figure 1: 長時間極限での位置の揺らぎの γ による変化：$\phi(t)$ が矩形波の場合 ($\epsilon/\beta = 1$, $\beta = 1$, $w = 0.4$).

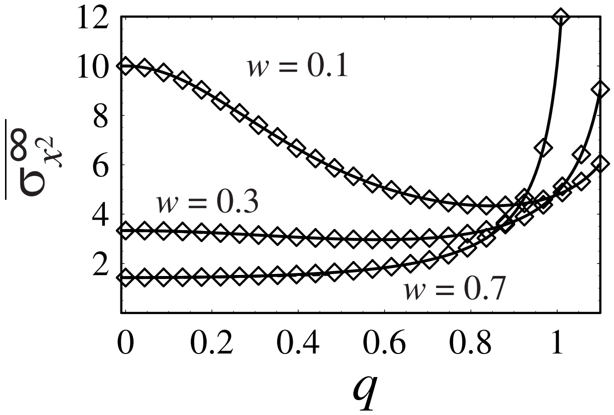

Figure 2: 長時間極限での位置の揺らぎの連分数により表現 (実線) と数値計算 ($\diamond$) の結果の比較 ($\epsilon/\beta = 1$, $\beta = 1$).

らぎ $\overline{\sigma_{x^2}^{\infty}}$ を q の関数として Figure 2 にプロットした．実線は q^8 までの級数から連分数に移行したものである．数値計算の結果 $\diamond$ とよく一致しているのが解る．

更に著者らは揺らぎ萎縮をより顕著にする周期関数を，解析的な表現を下に理論的な立場から幾つか提案した．前述の通り $c_0 = 0$ である周期関数の場合，揺らぎ萎縮を引き起こすことの出来るパラメータは限られる．例えば Figure 2 に示した $\phi(t) = 2\cos 2t$ も $c_0 = 0$ である周期関数であるが，$w = 0.1$，0.3 の場合は揺らぎ萎縮は起きているが，$w = 0.5$ となると揺らぎは単調増加に変わっている．著者らが提案した周期関数はこのようなパラメータの制限が緩和され，広い値で揺らぎ萎縮を引き起こすことが出来る．