論文の内容の要旨

論文題目:リスクメジャーによるヘッジング

氏名：梅澤祐二（学籍番号 27004）

本論文は、数理ファイナンスの研究の一つとして、リスクメジャーを使ってデリバティブをヘッジすることを考察し、その理論的基盤を与えることを企図して書かれた論文である。第一章は、単一期間リスクメジャー・多期間リスクメジャーの定義や基本事項について書かれており、補足的な内容になっている。第二章・第三章が筆者の研究結果である。第二章では、単一期間の枠組みにおいてヘッジングを考察した。その結果として、ヘッジの最小リスクについての表現を得た。第三章では、多期間の枠組みにおいてヘッジングを考察し、更に時間幅を無限小にするという極限を考察した。その結果として、ヘッジの最小リスクがあるベルマン方程式の粘性解になることが分かった。

以下ではより具体的に内容を述べてゆく。まずは、本研究の背景・先行研究について述べる。

現在の数理ファイナンスの重要な課題の一つに、金融派生商品のヘッジ・価格付けの問題がある。特に非完備市場の状況下でのヘッジ・価格付けには現時点で決定版と呼べるものが存在せず、数多くの研究者が研究を行っている。

非完備市場下でのヘッジ・価格付けに関する結果としては、 superhedging の手法が第一に挙げられる。しかし superhedging は多額の初期費用を要するので現実的であるとは言い難い。そこで、ある程度のリスクを許容するこ

とによって、superhedging より少ない初期費用で金融派生商品をヘッジするという、いわゆる『部分ヘッジ』の考えが広まって研究が重ねられている。

部分ヘッジの先駆的な研究は Föllmer, Leukert によって行われた。所謂 Quantile Hedging, Efficient Hedging の考えである。一方リスクの研究は、Artzner, Delbaen らが Coherent Risk Measure の概念を打ち出して以来さかんに行われるようになった。そして近年、従来の『満期でのリスクを現時点で一回だけ測る』単一期間リスクメジャーの枠組みを超えて、『期間の途中でもリスクを測る』多期間リスクメジャーの概念が何人もの研究者から提出される状況となってきた。

本論はこの二つの流れを汲み、考えを更に押し進めた。即ち部分ヘッジを行う者にとって許容できるリスクをリスクメジャーの概念によって記述し、そのリスクメジャーを使ってヘッジを行うという枠組みを考察した。この枠組みは、 Barrieu, El Karoui や Roorda らによって考察が始まり、同様の問題意識を持った論文がいくつか出ている。いずれも単一期間 Risk Measure に関するものである。

上述のような背景の下で、本論文では単一期間の場合と多期間の場合の考察を行った。その概要は以下の通りである。

単一期間での考察は第二章で述べられており、具体的な枠組みは次のようになっている。$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし、 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度で P と絶対連続であるようなもの全体のなす集合を $\mathcal{P}$ とする。 Convex Risk Measure と呼ばれる写像（定義などの詳細は本論に述べてある） $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ を一つ決めておく。適当な条件のもと ρ は

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} (E^Q[-X] - \alpha_{min}(Q)), \quad X \in L^\infty,$$

と表現される。$\alpha_{min} : \mathcal{P} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ は ρ から決まる写像である。

$\mathcal{C} \subset L^\infty$ を非空な凸集合とし、$\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \{Q \in \mathcal{P} \mid \sup_{Z \in \mathcal{C}} E^Q[Z] < \infty\}$ と置く。第二章の主要な結果は次の通りである。

定理：適当な仮定の下で、

$$\inf_{Z \in \mathcal{C}} \rho(Z + H) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} (E^Q[-H] - \tilde{\alpha}(Q)),$$

が全ての $H \in L^\infty$ に対して成立する。但し

$$\tilde{\alpha}(Q) = \alpha_{min}(Q) + \sup_{Z \in \mathcal{C}} E^Q[Z], \quad Q \in \mathcal{P}.$$

と置く。

この定理において、$\mathcal{C}$ は（何らかの意味で）完全ヘッジが可能な確率変数の集合であり、$-H$ はヘッジすべき対象となっているヨーロッパ型条件付き請求権の満期におけるペイオフを表していると解釈できる。従ってこの定理は、ρ を Risk Measure として使用した場合の、ヘッジリスクの最小値の表現を与えていることになる。

多期間での考察は第三章で述べられており、具体的な枠組みは次のようになっている。まず満期を表す時刻 $T < +\infty$ を一つ決め、時間を示す区間 $[0,T]$ を n 等分する。そして $n \to \infty$ とするような状況をここでは考える。元になるフィルトレーション付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \{\mathcal{F}_k\}_{k=0,1,2,\dots})$ をランダムウォークによって構成し、この確率空間上で 各 n ごとに非完備市場モデルを考える。危険資産の個数は M 個とし、それらの（割り引き後）危険資産価格 $S^{(n)}_{\cdot}$ の極限がブラックショールズ的になるようにモデルを構成する。そのモデル上、初期資産と自己充足的投資戦略の組 (v,ξ) で与えられる割り引きポートフォリオの時刻 k における価値を $V_k^{(n)}(v,\xi)$ と書く。また、デリバティブのペイオフを表す関数を $f : [0,\infty)^M \to \mathbb{R}$ で書く。

一方で、フィルトレーション $\{\mathcal{F}_k\}_{k=0,1,2,n}$ に付随する多期間バリューメジャー（これはリスクメジャーと等価なもの）$\eta(X|\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^n)$, $X \in L^\infty$ を、Mild Value Measure という関数 η から構成する（η の定義域は $[0,1]$ 上の確率測度全体からなる集合)。第三章の主要な結果は次である。

定理： $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup_{\xi \in \mathcal{SF}} \eta(V^{(n)}(v,\xi) + f(S_n^{(n)})|\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^n) = v + U(0,S_0)$ が成立する。ここで $\mathcal{SF}$ は取りうる自己充足的投資戦略全体の集合、$U : [0,T] \times [0,\infty)^M \to \mathbb{R}$ は次のベルマン方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \inf_{\gamma=(\gamma_{ii'})_{i,i'}\in\Gamma} \sum_{i,i'=1}^M \frac{1}{2}\gamma_{ii'} x_i x_{i'} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i x_{i'}} = 0,$$
$$U(T,x) = f(x), \quad x \in [0,\infty)^M,$$

の粘性解であり、条件 $U \in \hat{C}([0,\infty)^M : \mathbb{R})$ を満たす粘性解としては一意なものである。

ここで Γ は η から決定される、非負対称行列のある集合を示している。