

## 論文審査の結果の要旨

氏名 梅澤祐二

本論文は金融機関におけるリスク管理において主要な道具となりつつあるリスク尺度について研究し、特にリスク尺度と動的なヘッジングとの関係について調べたものである。

論文は2つの部分よりなる。第1部は、価格過程の極限が通常のブラックショールズモデルとなるような、ファイナンスでよく用いられる多項分岐的な離散時間の非完備市場のモデルにおいて、動的なリスク尺度を法則不変なコヒーレントリスク尺度に基づき定め、リスクを最小にするヘッジング戦略の問題を考え、その極限定理を示したものである。その結果について詳述する。

$\eta$  を法則不変なコヒーレントリスク尺度とする。いま、 $M < N < \infty$  とし  $S$  は濃度が  $N$  であるような  $\mathbf{R}^M$  の有限部分集合、 $\mu$  は  $S$  上の確率測度とする。 $\Omega = S^{\mathbf{N}}$ 、 $\mathcal{F}$  は  $\Omega$  のボレル加法族、 $P = \mu^{\otimes \infty}$  とおくと  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  は確率空間となる。 $Z_n : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^M$ ,  $n \geq 1$ , を  $Z_n(\omega) = \omega_n$ ,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$  で定め、 $r > 0$ ,  $b \in \mathbf{R}$ ,  $S_i > 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, M$ , とする。さらに

$$S_0^{(n)}(k) = S_0 \exp\left(\frac{k}{n}r\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$S_i^{(n)}(k) = S_i \exp\left(\frac{k}{n}b + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^k Z_j^i\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

とする。 $1 + M$  種類の証券があり、その価格過程が  $S_i^{(n)}$ ,  $i = 0, 1, \dots, M$  で与えられているという離散時間のファイナンスモデルを考える。

今、 $T > 0$ ,  $f : \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}$  とし、満期時刻が  $[nT]$ 、支払が  $f(S_1^{(n)}([nT]), \dots, S_M^{(n)}([nT]))$  となるヨーロッパ型デリバティブを考える。 $\eta$  に対応する多期間リスク尺度を  $\rho^{(n)}$  とし、さらに、ポートフォリオ戦略  $\xi$  をとったときの時刻  $k$  での利得を  $W(k; \xi)$  としたとき

$$U^{(n)} = \inf\{\rho^{(n)}(-f(S^{(n)}([nT])) + W([nT]; \xi)); \xi \text{ はポートフォリオ戦略}\}$$

を考える。 $U^{(n)}$  は動的ヘッジング戦略を考慮したときの最小リスクである。

論文では、ある種の無最低条件の下で  $U^{(n)}$  の性質を調べ、さらに、 $n \rightarrow \infty$  の時、それが、ある確率制御の問題に対応する HJB 方程式の一意的粘性解に収束することを示した。

この結果は以下のような意味を持つ。まず、 $S^{(n)}([nt])$  は  $n \rightarrow \infty$  において、法則収束するとは限らないが、もし、収束すれば、それは通常の多次元の Black-Sholes モデルとなる。その場合は完備モデルとなり、ファイナンスにおいてはヨーロッパ型デリバティブの価格は同値マルチンゲール確率測度での期待値で表現される。

しかしながら、ここで示されたことは、Black-Sholes モデルの確率測度に対して絶対連続ではないより広いマルチンゲール測度の族による期待値を考える必要があるということである。この結果はモデルリスクを考える際にも重要な示唆を与えてくれるものである。

また、第2部では凸リスク尺度を基礎にしてヘッジングを考えた場合ヨーロッパ型オプションに対しては新たな凸リスク尺度が定義されることを示しその形を特徴づけている。特に、この結果により、コヒーレントなリスク尺度に基づいて、ヨーロッパ型デリバティブを動的にヘッジングする問題を考えると、このリスク尺度に対応する確率測度の族に同値マルチンゲール測度が含まれていない場合はリスクを無限に小さくすることができ、このリスク尺度は無効になることが示される。この結果はリスク管理の方法について重要な示唆を与えている。

このように本論文ではリスク尺度と動的ヘッジングに関して基本的な結果を与えると同時に、不完備市場の取り扱いに対して新しい視点を与えており高く評価できるものである。

よって、論文提出者 梅澤 祐二 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。