

論文内容の要旨

論文題目 Dehn surgery creating Klein bottles
(クラインボトルを生じるデーン手術について)
氏名 桑子 和幸

本論文では、結び目のデーン手術によってクラインボトルが生じるという状況について考察している。デーン手術とは、元の多様体から新たな多様体を構成する一つの手段であり、これまでさまざまな人たちによって数多くの研究がなされてきた。以下で、デーン手術とは何か、どのような結果が知られているのかを説明しながら、論文の内容を述べる。

K を閉3次元多様体 Σ 内の区分的線形な結び目とする。 K の正則近傍 $N(K)$ を考えると位相的にはソリッドトーラスになる。 $N(K)$ を考えている多様体 Σ から抜き去り、新しいソリッドトーラスを埋め戻す操作のことを、結び目 K にそったデーン手術という。以下、 K を含む空間としては閉多様体を考えることにする。

どのようなデーン手術を行うのかを記述するにはスロープを用いる。結び目 K の補空間 M の境界 ∂M 上の単純閉曲線 λ, μ を、それぞれロンジチュード、メリディアンとする。閉3次元多様体 Σ が S^3 の場合、 λ はプリファードロンジチュードとする。以下、記号を濫用して、 λ, μ は1次元ホモロジー群 $H_1(\partial M)$ の元でもあるとみなす。 λ, μ は $H_1(\partial M)$ の生成元になることが知られている。

埋め戻すソリッドトーラスのメリディアン円板の境界が $a\lambda + b\mu \in H_1(\partial M)$ という元を代表しているとする。このようにメリディアン円板の境界の貼り合わせ先を指定すると、貼り合わせる同相写像のとり方によらずに出来る多様体が決まることが知られている。そこで、このようにしてできる閉多様体

はスロープ $b/a \in \mathbb{Q} \cup \{1/0\}$ によるデーン手術によって生じた多様体である、
 という言い方をし、手術後に出来る多様体を $M(b/a)$ のように表す。例えば、
 自明な埋め戻しにはスロープ $1/0$ が対応する。Gordon-Luecke([GL89]) によ
 り $M(m/n)$ が S^3 になるならば、 $m/n = 1/0$ であることが示されている。

任意の閉 3 次元多様体は S^3 から絡み目のデーン手術によって構成できる
 ということが Lickorish([Lic62]) により証明されている。結び目は 1 成分から
 なる絡み目とみなすことができる事とあわせて考えれば、結び目のデーン手
 術による結果がよく分かるということが 3 次元多様体の理解につながるこ
 とが推測できる。

二つのスロープ $r = m_1/n_1, s = m_2/n_2$ に対し、距離 $\Delta(r, s)$ を $|m_1n_2 -$
 $m_2n_1|$ により定める。 $\Delta(r, s)$ は r, s が代表する単純閉曲線の ∂M 上での幾何
 学的交点数である。一般の閉 3 次元多様体 Σ ではロンジチュードは一意的に
 決まらないのでスロープ自身の値は決まらないが、スロープ間の距離は定ま
 るので、以下はこの量を評価することを考える。

境界を一つ持ち、ザイフェルト多様体ではないような向き付け可能コンパ
 クト既約 3 次元多様体 M のデーン埋め込み (境界でソリッドトーラスと貼り
 合わせる事) により、基本群が巡回群になるとすると、そのような手術を与
 える手術係数間の距離は 1 で押さえられることが、Culler, Gordon, Luecke,
 Shalen ([CGLS87]) により示されている (巡回手術定理)。この論文の後半部
 では、本質的トーラスが埋め込み後に圧縮できる状況を考える部分がある。
 そこでは、デーン埋め込み後の多様体 $M(r), M(s)$ それぞれに取れる圧縮円
 板からグラフを構成し、解析することで証明を行なっているこの、曲面同士
 の交わりからグラフを構成し解析する手法は時に Gordon-Luecke method と
 呼ばれる。

この手法はもともとは向き付け可能な曲面同士の交わりを解析するだけで
 あった。向き付け可能な場合には parity rule と呼ばれる性質があり、議論の
 要所所で使われている。Teragaito([Ter02]) により、向き付け可能ではない
 曲面がある場合でも同様な parity rule が成立し、Gordon-Luecke 流の解析を
 利用できることが示されている。3 次元球面内には向き付け不可能な閉曲面
 は入らないから、デーン手術によって向き付け不可能な閉曲面が生じる状
 況を考える問題に Gordon-Luecke 流の手法で挑むことが可能になる。

向き付け不能閉曲面としてクラインボトルを考える。Ichihara, Teragaito
 ([IT03], [IT05]) による 2 本の論文で、3 次元球面内の結び目のデーン手術に
 より生じる多様体にクラインボトルが入るとすると、その手術係数 r は結び
 目の種数 g に対して、 $4g + 4$ で上から押えられることを示している。Gordon-
 Luecke 流の証明を行う部分と、3 次元多様体論で知られている結果を元に、
 詳細に解析していく部分の大きく二つに分かれる。

それでは S^3 内の結び目によるデーン手術によって出来る多様体 $M(r), M(s)$
 の両方にクラインボトルが入る状況が起こるとすると、二つの手術係数 r, s の

関係はどうだろうか. この部分の解明が本論文の結果である. 正確に言うと
 定理. M を S^3 内の結び目 K の補空間とする. デーン手術で得られる多様体
 $M(r), M(s)$ 両方にクラインボトルが入るとすると, 次のいずれかである.

1. K は 8 の字結び目で $\Delta(r, s) \leq 8$
2. K は $p = \pm 2$ あるいは $q = \pm 2$ となる (p, q) トーラス結び目で,

$$r, s \in \left\{ \frac{npq \pm 2}{n} \mid n \in 2\mathbb{Z} + 1 \right\}$$
3. K は $(2, q)$ ケーブル結び目で, $r, s \in \left\{ \frac{2nq \pm 2}{n} \mid n \in 2\mathbb{Z} + 1 \right\}$
4. $\Delta(r, s) \leq 4$

議論は上述の Ichihara, Teragaito の論文による議論を参考にし, 大きく二
 つの部分に分けて議論する. ひとつは, ケーブル結び目ではない結び目を考
 える部分で, もうひとつは, ケーブル結び目として扱う部分である. ここで,
 ケーブル結び目というのは, トーラス結び目のサテライトとして得られる結
 び目のことである. 特にケーブル結び目になりうるのは, トーラス結び目と
 サテライト結び目の一部であり, 双曲結び目などはケーブルではないことに
 注意しておく.

ケーブルでない場合は Gordon-Luecke 流の手法を用いる. 考える曲面は
 $M(r), M(s)$ 内に生じるはずのクラインボトル \hat{P}, \hat{Q} を M 内で見たと
 P, Q という穴の開いたクラインボトルである. 両方とも向き付け不可能な曲面のため,
 出来るグラフにレベルエッジと呼ばれる特殊な辺が生じる状況がある. この
 レベルエッジというのは, 向き付け不可能な曲面を扱うときに生じる特有
 の問題で, 向き付け可能な曲面同士を扱っている限りは生じない. このレ
 ベルエッジのあるなしにかかわらず通じる議論というのが困難をきたす点であ
 るが, 生じるグラフの辺をポジティブ, ネガティブの二つに分け, 議論して
 いく. 簡単に言うと, ある程度以上に $\Delta(r, s)$ の値を大きくとると, ポジテ
 ィブあるいはネガティブな辺が集中してきてしまい, ポジティブな辺がある程
 度以上多いときには S^3 内のデーン手術を考えているということに反する状
 況を生じ, ネガティブな辺が多いとすると, 考えている結び目がケーブル結
 び目になってしまうということを証明している.

ケーブル結び目の場合は次のように議論する. トーラス結び目の場合には
 デーン手術により生じる多様体は Moser ([Mos71]) により調べられている. ま
 た, トーラス結び目のデーン手術により生じた多様体はレンズ空間やその連
 結和, あるいはザイフェルト多様体と割合よく知られたものたちばかりにな
 る. これらの多様体については数多くの研究結果が知られているのでそれら
 を用いながら議論していく. トーラス結び目ではないケーブル結び目の場合
 については, コンパニオントーラスと生じるクラインボトルとの交わりに注

目して考える。このコンパニオントーラスと交わらなければ先ほどのトーラス結び目の状況に還元される。そうではないときは、コンパニオントーラスでデーン手術により生じる多様体を分割し、おのおの部分でどのようなことが起こるのかを考えていく。片一方は S^3 内の結び目補空間とみなすことが出来る。もう一方はケーブルスペースの内側部分にソリッドトーラスを貼り合わせる状況であるので、こちらについてはトーラス結び目にデーン手術をした場合とほぼ同様な状況であるから、出来る多様体自身については比較的分かっている。おのおの部分と生じるクラインボトルの交わり方に注目し、今まで知られている3次元多様体論の結果を用いることで議論を行う。

参考文献

- [CGLS87] M. Culler, C. McA. Gordon, J. Luecke, and P. B. Shalen. Dehn surgery on knots. *Ann. of Math.*, 125:237–300, 1987.
- [GL89] C. McA. Gordon and J. Luecke. Knots are determined by their complements. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(2):371–415, 1989.
- [IT03] K. Ichihara and M. Teragaito. Klein bottle surgery and genera of knots. *Pacific J. Math.*, 210(2):317–333, 2003.
- [IT05] K. Ichihara and M. Teragaito. Klein bottle surgery and genera of knots II. *Topology Appl.*, 146–147:195–199, 2005.
- [Lic62] W. B. R. Lickorish. A presentation of orientable combinatorial 3-manifolds. *Ann. of Math.*, 76:531–540, 1962.
- [Mos71] L. Moser. Elementary surgery along a torus knot. *Pacific J. Math.*, 38:737–745, 1971.
- [Ter02] M. Teragaito. Dehn surgery on crosscap number two knots and projective planes. *J. Knot Theory Ramifications*, 11(6):869–886, 2002.