

論文審査の結果の要旨

氏名 齊木 吉隆

本論文では、労働者、雇用者、ケインズの財政政策を行なう政府の三主体が経済を織りなす国と、より強いケインズ政策を行なう政府をもつ国の間に投資構造が存在することによってカオス的景気変動を生じる、純粋に資本主義的な構造をもつケインズ・グッドウィン型の二国景気循環連続力学系モデルに対して、系の不安定周期軌道に焦点をあてた考察をおこなっている。その際、系に埋め込まれた多数の不安定周期軌道を数値的に検出することが重要な手続きとなるが、検出にはニュートン・ラフソン・ミーズ法を用い、検出を試みる周期軌道の安定性指数と周期に対応した減速係数を導入することによって、各イテレーションにおいて、周期軌道からの本質的なずれのみを取り出す改良を施し、不安定性が高い周期軌道や周期が長い周期軌道を含む、より多くの周期軌道の検出を可能としている。この数値手法を用いて 8000 個以上の周期軌道を検出し、重複を除いた実質の種類でも 800 個以上を数値的に同定することに成功した。この検出で、周期の短い 500 個程度の周期軌道については、ほぼ網羅されていると考えられる。これらの周期軌道に基づいて、モデルが生み出す景気循環に関し、

1. 典型的ダイナミクス
2. 統計的性質
3. 位相的性質

の観点で考察をおこなっている。

1. ダイナミクスにおける典型的構造に着目して、カオス軌道と不安定周期軌道との間の詳細な対応関係を確認した。ある経済変数(第一国の労働分配率)の時間変動における極大値に着目して、それが減少に転じるまでに存在する極大の数によってダイナミクス(レジーム)を分類した。カオス軌道は、事実上(99%)、7種類のリジームに分類されるが、それら7種類のリジームのみで構成される周期軌道が検出された。

また、レジーム間遷移も周期軌道の存在によって捉えられることを確認した。カオス軌道においては、46種類のリジーム間遷移が確認されているが、1種類を除いた45種類のリジーム間遷移は検出された周期軌道の中に確認され、カオス軌道において確認されなかったレジーム間遷移は、検出された周期軌道の中にはひとつも検出されなかった。これらの結果は、本モデルのカオスダイナミクスの特徴的構造が、数値的に検出可能な周期軌道によって十分捉えられることを示している。

なお、二国間の相互作用パラメタを減らしていき、系が安定化してリミットサイクルをもつ状態まで周期軌道の分岐追跡を行ない、追跡過程で一部の周期軌道がア

トラクタからはずれていくこと、およびそれに伴って、アトラクタの構造(出現レジーム)が変化していることを確認した。この結果は、アトラクタの構造変化が、主に、不安定周期軌道の構造変化ではなく、埋め込まれた不安定周期軌道の種類の変化に対応していることを示唆している。一方、ある一つの周期軌道(UPO2)は、大きな構造の変化もなく、力学系が安定化した後にもアトラクタに埋め込まれ続けていることを確認した。

2. 数値的に検出された不安定周期解に関して、時間平均や分散などの低次の統計量を計算して、どの周期軌道もカオスの統計量を近似していること、さらに周期軌道(UPO2)の各経済変数に関する出現確率密度関数が、カオスのそれを良く近似していることを確認した。また、同じポアンカレ写像周期をもつすべての周期軌道に関し、すべての経済変数に関する統計量は、連続力学系の周期に対してほぼ線形な滑らかな依存を示すことを見出した。本結果は、周期無限大の周期軌道とみなせるカオス軌道を含めて、モデルの任意の周期軌道が大局的には同じ種類のダイナミクスをもつことを示唆する。さらに、500個の周期軌道を周期の短い順に複数のグループに分類して統計量を考察し、カオス軌道の統計量の近似の目的で、ひとつの周期軌道を選ぶ場合には、周期の短い周期軌道(例えばUPO2)で十分であるという結果を得た。なお、多数の周期軌道に基づくと、カオス軌道の低次の統計量は、およそ2%の誤差で近似可能であることも確認した。

3. カオス軌道は、周期無限大の周期軌道と解釈可能なため、周期軌道の周期に対する個数増大度に基づいて、「カオス軌道の種類」、すなわちカオスの複雑さを見積もることが可能である。この増大度は、力学系の位相エントロピーに関連する量であり、力学系を特徴づける極めて本質的な指標である。本論文では、短い周期をもつものに関してほぼ網羅された不安定周期軌道を、ポアンカレ写像の周期に基づいて分類してその個数を数え上げることで、指数増大度を1.4程度と見積もり、ローレンツ系の古典パラメタと比べてもカオスの複雑さが小さいことを明らかにした。数値的に検出可能な個数の周期軌道によって周期軌道の個数増大度を十分に見積もることが可能であることは、本力学系の位相的骨格が、周期が短い周期軌道によって捉え得ることを示唆している。

以上のように本論文は、マクロ経済学モデルとして目新しい観点、方法を与えた論文であり、独立な不安定周期軌道を約800個も系統的に求めたのは他に例がなく、従来漠然と信じられていた長い不安定周期軌道にわたる平均はカオス平均にほぼ一致する直感的な議論が実は正しくないことを示した高く評価できる。論文全体を通して、複雑な計算を実行して明快な結果を得る計算力や、大規模計算のための効率的なプログラム作りにおいていくつか独創的なアイデアが見て取られる。また、論文の記述も明快である。よって、論文提出者 齊木吉隆 は、博士(数理科学)の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。