論文内容の要旨

論文題目
Analytic and topological approaches to harmonic volumes of compact Riemann surfaces
(コンパクトリーマン面の調和体積に対する解析的，位相幾何学的手法)

氏名　田所　勇樹

私は本論文で，$\mathbb{C}P^2$ 上の 2 種類の平面曲線の調和体積の一部，超楕円曲線の Weierstrass 点を基点とする点付き調和体積を計算した．証明に主に使う手法として，(1) 代数曲線上での反復積分および反復積分の一般超幾何関数の特殊値への言い換え，グリーン関数から得られる 1-形式の積分，(2)Hurwitz 系 ([9]) を利用した Riemann 面上の 1 次元ホモロジー類の交点数の記述，(3) 調和体積を超楕円曲線のモジュライ空間上のある局所系の切断とみなして，ある超楕円曲線の調和体積の計算への帰着，(4) 群のねじれ係数コホモロジー，などが挙げられる．上記の解析的および位相幾何的手法により，調和体積を研究してきた．応用として，Klein 4 次曲線のヤコビアンにおけるある代数的サイクルが非自明であることを示した．

これまでの (点付き) 調和体積の結果を簡単にまとめておこう．種数 $g \geq 3$ のコンパクト Riemann 面を X とおき，X の 1 次元コホモロジー群 $H^1(X;\mathbb{Z})$ を H と表す．H は X 上の $\mathbb{Z}$ に周期を持つ実調和 1-形式全体と同一視できる．B. Harris [4] は調和体積 I を，2 個の実調和 1-形式を反復積分 (Chen [2]) することによって自然に得られる準同型 $(H^{\otimes 3})' \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，として定めた．$(H^{\otimes 3})'$ は $H^{\otimes 3}$ のある部分加群である．Harris は，X の複素構造を Schiffer 内部変分で変化させたときの I の変分公式を導いた．I は Riemann 面のモジュライ空間 $\mathbb{M}_g$ 上のある種の連続関数とみなすこともできる．さらに，I は X から定まる 3 次元トーラス $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ 上での調和 3-形式の積分と一致することを示した．これと X のヤコビアン $J(X)$ の中間ヤコビアンを利用し，$J(F(4))$ 上の代数的サイクル $F(4) - F(4)^-$ が非自明で

あることを示した ([5], [6])．ここで，$F(4)$ は Fermat 4 次曲線である．Faucette [3] は調和体積を拡張した X の高次元調和体積を定義し，それが調和体積と似た性質が成り立つことを示した．Pulte [7] は調和体積 I を定義する際に得られる反復積分を点付き調和体積 $I_{x_0}\colon K\otimes H \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ として定めた．ここで，x_0 は X 上の点であり，K は交叉形式 $H\otimes H \to \mathbb{Z}$ の核である．Pulte は I_{x_0} を精密にとらえ，混合 Hodge 構造を用いて，点付き Torelli の定理を示した．また，Hain，河澄は独立に，(点付き) 調和体積の変分によって得られる 2-形式が $\mathbb{M}_g$ の特性類である森田-Mumford 類 $e_1 \in H^2(\mathbb{M}_g;\mathbb{C})$ を表す微分形式と一致することを示した．Harris によって，超楕円曲線の調和体積は 0 or 1/2 mod $\mathbb{Z}$ であることが知られていたが，$(H^{\otimes 3})'$ のどの元に対して，0 になるか 1/2 になるかは知られていなかった．[8] において，私は超楕円曲線の調和体積を完全に決定した．証明は直接反復積分を計算する方法と超楕円的写像類群のねじれ係数コホモロジー群を計算する方法の 2 通りある．

これより，論文内容について述べる．本論文は主に 3 つの部分に分かれている．

1. A nontrivial algebraic cycle in the Jacobian variety of the Klein quartic

定理 1 (論文, Theorem 1.17)
C を Klein 4 次曲線とする．$J(C)$ における代数的サイクル $C - C^-$ は非自明である．

この定理を C の調和体積を計算することによって示した．Ceresa [1] によれば，$\mathbb{M}_g$ 上の一般的な Riemann 面 X に対して，$J(X)$ 上の代数的サイクル $X - X^-$ が非自明であることを示した．しかし，その具体例は Harris による，Fermat 4 次曲線の場合しか知られていなかったと思われる．Harris の手法は，Fermat 4 次曲線曲線の特殊な性質が利用されていて，他の Riemann 面には適用しにくい．調和体積の計算には，ガロア理論，一般超幾何関数 ${}_3F_2$ の特殊値，を用いて煩雑な計算をまとめることに成功した．

2. The pointed harmonic volumes of hyperelliptic curves with Weierstrass base points

超楕円曲線の Weierstrass 点 p を基点とする点付き調和体積を完全に計算した．証明は 2 通りある．1 つは，ある超楕円曲線 C_0 の点付き調和体積 I_p を直接反復積分を用いて計算し，I_p が $\mathbb{M}_g$ 上のある局所系の連続切断であることを利用して一般の超楕円曲線 C に拡張する方法．[8](参考論文) のものに比べ，計算は複雑となった．もう 1 つは超楕円的写像類群 Δ_g の $\mathrm{Hom}(K\otimes H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 係数コホモロ

ジー $H^0(\Delta_g^1; \mathrm{Hom}(K \otimes H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$ を利用して求める方法．後者の方法では，超楕円曲線 C 上に $2g+2$ 個ある Weierstrass 点 $P_0, P_1, \ldots, P_{2g+1}$ を利用して，以下のような組み合わせ公式を導いた．

定理 2 (論文, Theorem 2.14)
P_ν を固定する．$A \in K \otimes H$ に対して，組み合わせ的に関数 $\kappa_\nu \colon K \otimes H \to \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \{0, 1/2\}$ が定まる．このとき，

$$I_{P_\nu}(A) \equiv \kappa_\nu(A) \bmod \mathbb{Z},$$

が成立する．

3. A nontrivial algebraic cycle in the Jacobian variety of the Fermat sextic

定理 3 (論文, Theorem 3.13)
$F(6)$ を Fermat 6 次曲線とする．$J(F(6))$ における代数的サイクル $F(6) - F(6)^-$ は非自明である．

Harris が，$F(4)$ の場合に利用した証明と同様の手法を用いた．現時点では，この手法は $F(4)$ と $F(6)$ 以外の Riemann 面には適用できていない．

謝辞

本論文の執筆にあたって，私は多くの方々に支えられた．河野俊丈東大教授・森田茂之東大教授の講義からは大きな刺激を受け，私が取り組んだ研究の動機付けとなった．院生室 406 のメンバーや友人，特に同年代の，伊藤哲史・勝良健史・吉永正彦・吉田輝義の 4 氏には，数学上の有益な助言だけではなく数学者としての心構えを学んだ．最後に，修士・博士課程の長期間に渡って指導して頂いた河澄響矢東大助教授には最大の感謝を捧げたい．畑を耕すように辛抱強く見守ってくれた彼の温かく細やかな指導は，これから先の人生の豊かな糧となるだろう．

参考文献

[1] Ceresa, G.: *C is not algebraically equivalent to C^- in its Jacobian.* Ann. of Math. (2) **117** (1983), no. 2, 285–291.

[2] Chen, Kuo Tsai: *Algebras of iterated path integrals and fundamental groups.* Trans. Amer. Math. Soc. **156** 1971 359–379.

[3] Faucette, William M.: *Harmonic volume, symmetric products, and the Abel-Jacobi map.* Trans. Amer. Math. Soc. **335** (1993), no. 1, 303–327.

[4] Harris, Bruno: *Harmonic volumes.* Acta Math. **150** (1983), no. 1-2, 91–123.

[5] Harris, Bruno: *Homological versus algebraic equivalence in a Jacobian.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **80** (1983), no. 4 i., 1157–1158.

[6] Harris, Bruno: *Iterated integrals and cycles on algebraic manifolds.* Nankai Tracts in Mathematics, **7**. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2004.

[7] Pulte, Michael J.: *The fundamental group of a Riemann surface: mixed Hodge structures and algebraic cycles.* Duke Math. J. **57** (1988), no. 3, 721–760.

[8] Tadokoro, Yuuki: *The harmonic volumes of hyperelliptic curves.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005), no. 3, 799–820.

[9] Tretkoff, C. L.; Tretkoff, M. D.: *Combinatorial group theory, Riemann surfaces and differential equations.* Contributions to group theory, 467–519, Contemp. Math., **33**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.