論文の内容の要旨

論文題目　Hopf bifurcations in the singular limit equations of reaction-diffusion systems

ある反応拡散方程式系の特異極限における Hopf 分岐解の存在

氏　　名　満島　正浩

次の反応拡散方程式系を考える.

$$\begin{cases} \epsilon\tau u_t = \epsilon^2 u_{xx} + (1-u^2)(u - f(v)), & -1 < x < 1,\ t > 0, \\ v_t = D v_{xx} + u - \gamma v, & -1 < x < 1,\ t > 0, \\ u_x = v_x = 0, & x = \pm 1,\ t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

ここで ϵ, τ, D 及び γ は正のパラメータ, f は原点を含むある領域 I 上で定義された次の条件を満たす滑らかな関数である.

$$f'(0) > 0,$$
$$f(-v) = -f(v), \quad {}^\forall v \in I,$$
$$\int_{-1}^{u} (1-s^2)(s - f(v))ds < 0, \quad {}^\forall v \in I,\ {}^\forall u \in (-1, f(v)),$$
$$\int_{1}^{u} (1-s^2)(s - f(v))ds < 0, \quad {}^\forall v \in I,\ {}^\forall u \in (f(v), 1).$$

(1) についてはこれまで, ϵ を微小パラメータととることにより内部に遷移層を持つ解の存在が知られている (三村, 田端, 細野 [1]). 西浦, 藤井 [2] は $\tau = \epsilon^{-1}$ の場合に 1 遷移層を持つ定常解のスペクトルを調べ, その線形安定性を示した. さらに西浦, 三村 [3] は, τ を分岐パラメータととることにより 1 遷移層定常解が虚軸を横断する固有値を持つことを示した. これは Hopf 分岐 (時間周期解の分岐) の起こる必要条件である. さらに彼らは, 数値シミュレーションにより遷移層が時間周期的に振動する解の存在を予想した. この振動解は “breather” と呼ばれている.

本論文は, (1) において 1 遷移層を持つ解についての $\epsilon \to 0$ の特異極限方程式

$$
\begin{cases}
\dot{\phi} = \dfrac{\sqrt{2} f(v(\phi,t))}{\tau}, & t > 0, \\
v_t = D v_{xx} - \chi_{[-1,\phi]} + \chi_{[\phi,1]} - \gamma v, & -1 < x < 1,\ t > 0, \\
v_x = 0, & x = \pm 1,\ t > 0,
\end{cases} \tag{2}
$$

を考える. ここで $\phi(t)$ は遷移層の位置を表す未知関数, χ_A は $A \subset \mathbb{R}$ の特性関数である. (2) は (1) の 1 遷移層定常解に対応する定常解 $(\phi, v) = (0, V)$ を持つ. ここで

$$
V(x) = \begin{cases}
-\dfrac{1}{\gamma}\left(1 - \dfrac{\cosh\sqrt{\gamma/D}(x+1)}{\cosh\sqrt{\gamma/D}}\right), & -1 < x < 0, \\
\dfrac{1}{\gamma}\left(1 - \dfrac{\cosh\sqrt{\gamma/D}(x-1)}{\cosh\sqrt{\gamma/D}}\right), & 0 < x < 1,
\end{cases}
$$

である. 本論文ではまず, (2) の定常解 $(0, V)$ での線形化作用素 $\mathcal{L}(\tau)$ の固有値問題を考える. そして

$$
D = O(\gamma) \quad (\gamma \to 0)
$$

を仮定するとき, ある γ の関数 τ_0 及び ω_0 が存在して $\mathcal{L}(\tau_0)$ は固有値 $\pm i\omega_0$ を持つことを示す. さらに, $\tau = \tau_0$ での分岐方程式を計算することにより, $(\tau, \phi, v) = (\tau_0, 0, V)$ より Hopf 分岐解が分岐すること, また, $f'''(0) < 0$ (または $f'''(0) > 0$) のとき, この分岐は超臨界分岐 (または亜臨界分岐) であることを証明する.

参考文献

[1] M. Mimura, M. Tabata and Y. Hosono, *Multiple solutions of two-point boundary value problems of Neumann type with a small parameter,* SIAM J. Math. Anal. 11 (1980), pp. 613-631.

[2] Y. Nishiura and H. Fujii, *Stability of singulary perturbed solutions to systems of reaction diffusion equations,* SIAM J. Math. Anal. 18 (1987), pp. 1726-1770.

[3] Y. Nishiura and M. Mimura, *Layer oscillations in reaction-diffusion systems,* SIAM J. Appl. Math. 49 (1989), pp. 481-514.