論文の内容の要旨

論文題目: The primitive vector field and the real semi-analytic geometry of a finite reflection group.

(有限鏡映群の原始ベクトル場と実半解析的集合の幾何学との関係について)

氏名: 八嶋 洋行

$V=\mathbb{R}^l$ を l 次元の Euclid 空間とする. W を有限で既約な鏡映群とし, 鏡映群 W の V への作用は効果的であるとする. さらに W_Σ を鏡映群 W の放物型部分群として, V' を W_Σ が効果的に作用するベクトル空間とする. この論文では, 鏡映群 W から定まる判別式 (discriminant)Δ と W から定まる (圏的) 商空間上の原始的ベクトル場 ξ を用いて, V' から V への W_Σ 同変な埋め込み写像を構成する.

$\mathcal{A}(W)$ を, 鏡映が W の元になっている超平面全体の集合とし, W に関する鏡映面配置と呼ぶ. (W,Γ) を W の Coxeter 系とし, D を (W,Γ) の W-作用に関する基本領域とする.

K を体 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ のいずれかとし, $V_K := V\otimes K$ とする. $\mathcal{R}$ を鏡映群の不変式環とすると, Chevalley の定理により, 代数的に独立な斉次不変多項式 $\gamma_1,\dots,\gamma_l$ $(\deg\gamma_1\le\cdots\le\deg\gamma_l)$ が存在して, $\mathcal{R}$ は $\mathcal{R}=K[\gamma_1,\dots,\gamma_l]$ と書き表すことができる. ここで, この生成元集合を以下 1 つとって固定する.

ここで商写像 $\pi: V_K\to K^l$ を $\pi(z)=(\gamma_1(z),\dots,\gamma_l(z))$ とする. この写像の値域 K^l を V_K の圏的商空間とよび, 以下 $\tilde{V}_K$ と書くことにする. ここで, $\tilde{V}_K$ の γ_l 方向のベクトル場は原始形式や平坦構造の理論における, 原始ベクトル場となる ([Sal1], [Sal2]). 以下 ξ で $\tilde{V}_K$ の原始ベクトル場を表すことにす

る．また, $p:\tilde{V}_K\to K^{l-1}$ を原始ベクトル場の方向に関する射影とし, この写像の値域を $T_K=K^{l-1}$ と書くことにする．ここで, $\mathcal{D}:=\pi(D)\subset\tilde{V}_{\mathbb{R}}$, E を $p\circ\pi(D)\subset T_{\mathbb{R}}$ の内点集合とする．

ここで, W の判別式 Δ を $\Delta:=\prod_{H\in\mathcal{A}(W)}\ell_H^2$. とおく．ここで, ℓ_H は超平面 H を定義する 1 次式とする．$\Delta\in\mathcal{R}$ なので, 圏的商空間 $\tilde{V}$ の中に判別式の零点集合 $D_W:=\{\Delta=0\}$ を定める．このとき判別式 Δ は, W の各生成元 $\sigma\in\Gamma$ に対応する $\bar{E}_W$ 上の 1 価解析関数 φ_σ が存在して

$$\Delta=c\prod_{\sigma\in\Gamma}(\gamma_l-\varphi_\sigma(\gamma_1,\ldots,\gamma_{l-1}))\quad\text{ in } p^{-1}(\bar{E})$$

と書き表される ([Sai3])．原始ベクトル場 ξ は判別式の零点集合 D_W の正規点集合と横断的であることから, 解析関数の零点集合 $\gamma_l-\varphi_\sigma=0$ を原始ベクトル場に沿って動かした像 $\gamma_l-\varphi_\sigma=\pm\varepsilon$ は実基本領域の商 $\mathcal{D}$ との共通部分は $l-1$ 次元の実半解析的集合になる．$\varepsilon\in\mathbb{R}$ に対して, $p^{-1}(\bar{E}_W)$ 上で定義される半解析的集合 $\mathcal{L}_\sigma(\varepsilon)$ を

$$\mathcal{L}_\sigma(\varepsilon):=\{(\gamma_1,\ldots,\gamma_l)|\gamma_l-\varphi_\sigma(\gamma_1,\ldots,\gamma_{l-1})+\varepsilon=0\},$$

とおく．また, $\sigma\in\Gamma$ に対して符号 ±1 を次のように定める．

$$\mathrm{sgn}(\sigma)=\pm1 \text{ if } \mathcal{L}_\sigma(\mp1)\cap\mathcal{D}\neq\emptyset.$$

Γ の部分集合 Σ に対して $\tilde{V}$ 上の実解析的集合 $\mathcal{L}_\Sigma\subset p^{-1}(\bar{E})$, および V 上の半解析的集合 $L_\Sigma\subset V$ をそれぞれ次のように定義する．

$$\mathcal{L}_\Sigma:=\bigcap_{\sigma\in\Gamma\setminus\Sigma}(-\mathrm{sgn}(\sigma))\mathcal{L}_\sigma$$
$$L_\Sigma:=\bigcup_{w\in W_\Sigma}w.\left((\pi_W|_D)^{-1}(\mathcal{L}_\Sigma)\right)$$

この半解析的集合 L_Σ は W の部分群としての W_Σ 作用に関して不変である．この半解析的集合 L_Σ を像とする V' から V への W_Σ-同変な埋め込み写像を構成することができた．

Theorem 1. *Σ を Γ の真部分集合とし $r=|\Sigma|$ とする．W_Σ を Σ で生成される W の放物型部分群とする．$V'=\mathbb{R}^r$ を W_Σ が効果的に作用する Euclid 空間とする．このとき, 同相な埋め込み写像 $\iota_\Sigma:V'\hookrightarrow V$ で, 次の性質を満たすものが存在する．*

1. *$\iota_\Sigma(V')=L_\Sigma$ で ι_Σ は V' と L_Σ の間の同相写像を与える．*
2. *写像 ι_Σ は V' の鏡映面配置 $\mathcal{A}(W_\Sigma)$ の補空間 $V'\setminus\cup_{H\in\mathcal{A}(W_\Sigma)}H$ を V の鏡映面配置 $\mathcal{A}(W)$ の補空間 $V\setminus\cup_{H\in\mathcal{A}(W)}H$ にうつす．*
3. *$H\in\mathcal{A}(W_\Sigma)$ を鏡映面とし, $w\in W_\Sigma$ を H に関する鏡映とする．このとき, ι_Σ は超平面 H を $\mathcal{A}(W)$ の超平面 H' の中にうつす．このとき, この*

超平面 H' に関する鏡映 $w' \in W$ は自然な単射準同型 $W_\Sigma \hookrightarrow W$ を通して w と同一視される．

4. 写像 ι_Σ は W_Σ 作用に関して同変である．

特に $|\Sigma| = l - 1$ の場合は上の *2.* から *4.* を満たす滑らかな半解析的写像 $\Psi_j : V' \to V$ であって，像 $\Psi_j(\mathbb{R}^{l-1})$ が $\mathbb{R}^{l-1}$ と微分同相になるものが存在する．

これら定理により, Artin 群のコホモロジーに関する系が得られる．

ここで，鏡映群 W の Artin 群 $\check{W}$ とは，複素化した鏡映面配置の補空間 $M(\mathcal{A}(W)) := (V \otimes \mathbb{C}) \setminus \cup_{H \in \mathcal{A}(W)}(H \otimes \mathbb{C})$ の W-作用に関する商空間の基本群 $\check{W} := \pi_1 (M(\mathcal{A}(W))/W)$ である．上の写像 Ψ_Σ は性質 1. 2. から, 超平面配置によって定義される面分の組み合わせ的な構造を保つ．それにより埋め込み写像 Ψ_Σ は Salvetti 複体 X_W ([Sal1], [Sal2]) の埋め込み $\Psi_\Sigma^* : X_{W_\Sigma} \hookrightarrow X_W$ を誘導する．これにより, 次の系が得られる．

Corollary 2. 埋め込み写像 Ψ_Σ は *Artin* 群 $\check{W}$ と $\check{W}_\Sigma$ の整係数コホモロジーの間の準同型写像 $\Psi_j^* : H^*(\check{W}; \mathbb{Z}) \to H^*(\check{W}_\Sigma; \mathbb{Z})$. を誘導する．

参考文献

[D] Deligne, P.: Les immeubles des groupes de tresses généralisés, *Invent. Math.*, **17**(1972), 273-302.

[Sai1] Saito, K.: Period mapping associated to a primitive form, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **19**(1983), 1231-1264.

[Sai2] Saito, K.: On a linear structure of the quotient variety by a finite reflection group, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **29**(1993), 535-579.

[Sai3] Saito, K.: Polyhedra dual to the Weyl chamber decomposition: A précis, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **40**(2004), 1337-1384.

[Sal1] Salvetti, M.: Topology of the complement of real hyperplanes in $\mathbb{C}^n$, *Invent. Math.*, **88**(1987), 167-189.

[Sal2] Salvetti, M.: The homotopy type of Artin groups, *Math. Res. Lett.*, **1**(1994), 565-577.