

論文の内容の要旨

論文題目 Mathematical Finance and Limit Theorems
(数理ファイナンスと極限定理)

氏名 加藤 恭

本論文では、数理ファイナンスと極限定理について、大別して次の二つのテーマを扱っている。一つ目は「マーケット・インパクトを考慮した市場モデルにおける最適執行問題」であり、投資家の売却行動が金融資産価格に与えてしまう場合、保有している金融資産をどのように売却すべきか、という問題である。二つ目は「汎関数型確率差分方程式の解に対する極限定理」であり、強混合条件下における確率差分方程式に対する拡散近似の理論を、汎関数型の場合に拡張したものである。

1 マーケット・インパクトを考慮した市場モデルにおける最適執行問題

投資家の最適投資問題は数理ファイナンスの大きなテーマの一つである。その古典的な理論は Merton によって確立されたが、実際の市場における現実的な問題として、流動性の問題が近年注目されている。その一つとして、本論文ではマーケット・インパクト (投資家の売却行動が金融資産価格に与える影響) を考慮した下での投資家の最適執行 (売却) 問題に対する研究を行った。以下概略を述べる。

市場は一つの安全資産と一つの危険資産からなるとし、安全資産の価格は常に 1 とする。投資家は、初期時点 $t = 0$ において危険資産を $\Phi_0 > 0$ 単位保有しているものとする。そして、投資家による (危険資産の) 売却行動は、危険資産の価格に対して、売却量に従ったマーケット・インパクトを与えるとする。投資家は危険資産の売却方法を選ぶことで期末時刻 1 における期待効用の最大化を行うとする。

$n \in \mathbb{N}$ とし、取引時刻を $0, 1/n, \dots, (n-1)/n$ とする。 S_t^n で t/n 時における危険資産の価格を表し、その対数価格を $X_t^n = \log S_t^n$ とおく。まず 0 時における危険資産の価格を $s_0 > 0$ とし (i.e. $S_0^n = s_0$)、投資家が l/n 時に ψ_l^n 単位だけ危険資産を売却する時、危険資産の価格は $S_l^n e^{-g_n(\psi_l^n)}$ に変化し (よって対数価格は $X_l^n - g_n(\psi_l^n)$)

に変化する), 投資家はその売却代金 $\psi_l^n S_l^n e^{-g_n(\psi_l^n)}$ を安全資産として得る. ここで $g_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ は単調非減少で連続微分可能な関数. そして, $(l+1)/n$ 時における危険資産の対数価格 X_{l+1}^n は

$$X_{l+1}^n = Y\left(\frac{l+1}{n}; \frac{l}{n}, X_l^n - g_n(\psi_l^n)\right) \quad (1)$$

で与えられるとする. ここで $Y(t; r, x)$ は確率微分方程式

$$\begin{cases} dY(t; r, x) = \sigma(Y(t; r, x))dB_t + b(Y(t; r, x))dt, & t \geq r, \\ Y(r; r, x) = x \end{cases}$$

の解であり, B_t は 1 次元の標準 Brown 運動. また S_{l+1}^n は

$$S_{l+1}^n = \exp(X_{l+1}^n) \quad (2)$$

によって与えられる.

執行戦略 (売却戦略) $(\psi_l^n)_{l=0}^{n-1}$ により, 期末時刻 1 における投資家の資産の保有量は安全資産が W_n^n 単位, 危険資産が φ_n^n 単位となり, また期末時刻における危険資産の価格は S_n^n となる. ここで, $(W_l^n)_{l=0}^n$ 及び $(\varphi_l^n)_{l=0}^n$ は

$$W_{l+1}^n = W_l^n + \psi_l^n S_l^n \exp(-g_n(\psi_l^n)), \quad \varphi_{l+1}^n = \varphi_l^n - \psi_l^n \quad (l = 0, \dots, n-1) \quad (3)$$

及び $W_0^n = 0, \varphi_0^n = \Phi_0$ によって与えられる.

投資家における最適化問題は, 許容執行戦略 $(\psi_l^n)_{l=0}^{n-1} \in \mathcal{A}_n^n(\Phi_0)$ を選択することで, 期末時刻における期待効用 $E[u(W_n^n, \varphi_n^n, S_n^n)]$ を最大化することである (集合 $\mathcal{A}_n^n(\varphi)$ の定義は本論文 19 頁で与える). ここで $u : D \rightarrow [0, \infty)$ は投資家の効用関数 (但し $D = [0, \infty) \times [0, \Phi_0] \times (0, \infty)$).

さて, $k = 1, \dots, n$, $(w, \varphi, s) \in D$ 及び関数 u に対し, 離散時間の value function $V_k^n(w, \varphi, s; u)$ を

$$V_k^n(w, \varphi, s; u) = \sup_{(\psi_l^n)_{l=0}^{k-1} \in \mathcal{A}_k^n(\varphi)} E[u(W_k^n, \varphi_k^n, S_k^n)]$$

で定義する. ここで $(W_l^n, \varphi_l^n, S_l^n)_{l=0}^k$ は関係式 (1), (2) 及び (3) ($l = 0, \dots, k-1$) と初期条件 $(W_0^n, \varphi_0^n, S_0^n) = (w, \varphi, s)$ によって与えられるとする. また $V_0^n(w, \varphi, s; u) = u(w, \varphi, s)$ と書く. この時, 投資家の最適執行問題は $V_n^n(0, \Phi_0, s_0; u)$ を考察することと同値である.

以下, $V_k^n(w, \varphi, s; u)$ の (適当な scaling を施した下での) $n \rightarrow \infty$ とした時の極限について考察する. 関数 g_n に次の仮定を置く.

[A] ある単調非減少連続関数 $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\psi \in [0, \Phi_0]} \left| \frac{d}{d\psi} g_n(\psi) - h(n\psi) \right| = 0$ が成り立つ.

$t \in [0, 1]$, $(w, \varphi, s) \in D$ 及び関数 u に対して, 関数 $V_t(w, \varphi, s; u)$ を以下で定義する.

$$V_t(w, \varphi, s; u) = \sup_{(\zeta_r)_{r \in \mathcal{A}_t}(\varphi)} E[u(W_t, \varphi_t, S_t)].$$

ここで, $\mathcal{A}_t(\varphi)$ は “連続時間の” 許容執行戦略 $(\zeta_r)_{r \in [0, t]}$ 全体からなる集合 (正確な定義は本論文 20 頁で与える). また確率過程の 3 つ組 $(W_r, \varphi_r, S_r)_{r \in [0, t]}$ は

$$dW_r = \zeta_r S_r dr, \quad d\varphi_r = -\zeta_r dr, \quad dX_r = \sigma(X_r)dB_r + b(X_r)dr - g(\zeta_r)dr, \quad S_r = \exp(X_r)$$

及び $(W_0, \varphi_0, S_0) = (w, \varphi, s)$ で与えられるものとする. ここで $g(\zeta) = \int_0^\zeta h(\zeta') d\zeta'$.

以上の設定の下で, 各 $t \in [0, 1]$, $(w, \varphi, s) \in D$ 及び関数 u に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{[nt]}^n(w, \varphi, s; u) = V_t(w, \varphi, s; u).$$

が成り立つことを本論文では証明した. さらに, 関数 $V_t(w, \varphi, s; u)$ の連続性, 半群性等の性質について研究を行い, また $V_t(w, \varphi, s; u)$ が Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式と呼ばれるある非線形偏微分方程式の粘性解となることを本論文では示した.

2 汎関数型確率差分方程式の解に対する極限定理

確率常微分方程式及び確率差分方程式の拡散近似の理論は様々な論文で扱われているテーマである。特に Kesten-Papanicolaou は strong mixing condition の下で、ある確率常微分方程式の解に対する極限定理を示した。その離散版に相当する結果として、ある確率差分方程式の解に対する極限定理が渡邊壽夫氏によって示されている。

本論文ではその一般化として、確率空間 $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, P^n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 上の次の形の汎関数型確率差分方程式

$$X_{(k+1)/n}^n - X_{k/n}^n = \frac{1}{\sqrt{n}} F_k^n(X^n, \omega) + \frac{1}{n} G_k^n(X^n, \omega), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

linear interpolation

$$X_t^n = (1 - nt + k)X_{k/n}^n + (nt - k)X_{(k+1)/n}^n, \quad k/n < t < (k+1)/n$$

及び初期条件 $X_0^n = x_0 \in \mathbb{R}^d$ が定める確率過程 $(X_t^n)_{t \in [0, \infty)}$ に対して同様の問題を考察し、渡邊氏の結果の拡張に相当する極限定理を得た。ここで、 $F_k^n(w, \omega) = (F_k^{n,i}(w, \omega))_{i=1}^d$, $G_k^n(w, \omega) = (G_k^{n,i}(w, \omega))_{i=1}^d$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) は、パラメーター空間として連続関数の空間 $C([0, \infty); \mathbb{R}^d)$ を持つ $\mathcal{B}_{k/n} \otimes \mathcal{F}^n$ -可測な \mathbb{R}^d -値の random function (但し $\mathcal{B}_t = \sigma(w(s); s \leq t)$)。また $F_k^{n,i}(w)$ の期待値は 0 とする。

渡邊氏の結果は、上の random function が $F_k^n(w, \omega) = \tilde{F}_k^n(w(k/n), \omega)$, $G_k^n(w, \omega) = \tilde{G}_k^n(w(k/n), \omega)$ という形をしている場合に相当する。渡邊氏は、random function $\tilde{F}_k^n(x, \omega)$, $\tilde{G}_k^n(x, \omega)$ に対して smoothness, moment condition 及び strong mixing condition を仮定した下での極限定理を示している。そこでは strong mixing 係数を用いた共分散のある評価式 (mixing 不等式) が重要な役割を果たしている。しかしその不等式はパラメーター空間の次元が深く関与するものであり、本論文ではパラメーター空間 $C([0, \infty); \mathbb{R}^d)$ が無限次元であるため、その不等式をそのままの形で用いることは出来ない。そこで本論文では、この mixing 不等式の拡張としてある次元に関する条件 (以下 dimensional condition と呼ぶ) を満たす random function に対する新たな mixing 不等式を示し、 $F_k^n(w, \omega)$ 及び $G_k^n(w, \omega)$ が smoothness, moment condition, strong mixing condition に加えて dimensional condition (詳細は本論文 55 頁で与える) を満たす場合に、 $(X_t^n)_{t \in [0, \infty)}$ の分布がある martingale problem の解に $C([0, \infty); \mathbb{R}^d)$ 上弱収束することを示した。

本論文で得られた結果を用いることで、例えば

$$X_{(k+1)/n}^n - X_{k/n}^n = \frac{1}{\sqrt{n}} f_k^n \left(\frac{n}{k} \int_0^{k/n} \psi(X_s^n) ds, \omega \right)$$

(但し $f_k(x, \omega)$ は k について stationary な平均 0 の random function, $\psi(x)$ は滑らかな deterministic function) や

$$X_{(k+1)/n}^n - X_{k/n}^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \{h(k/n, X^n, \xi_k) - E[h(k/n, X^n, \xi_k)]\} + \frac{1}{n} E[h(k/n, X^n, \xi_k)]$$

(但し ξ_k は stationary Gaussian process, $h(t, x, y) = g\left(\int_0^t u(s, w(t-s), \psi(y)) ds\right)$ とし、また $g(x)$, $u(t, x, y)$, $\psi(x)$ は有界かつ滑らかな deterministic function. 厳密な設定は本論文 87 頁で与える) という形の差分方程式に対しても $(X_t^n)_{t \in [0, \infty)}$ の極限を得る事が出来る。

また主定理の応用として、陰関数型の random な方程式系における極限定理も本論文では示した。これは、均衡理論に基づく株価過程の構成に関する私の修士論文の主結果の数学的な拡張に相当するものである。