

論文審査の結果の要旨

氏名 加藤 恭

本論文では市場において大規模な量の証券を売買した場合に市場価格に影響を与えるというマーケットインパクトを考慮した上での最適の資産の売買戦略を考察している。論文では実際には、特定の時間内にある量の証券を売却しなくてはならないという状況下で、マーケットインパクトを含むファイナンスのモデルを与え、そのモデルの下で効用関数を考え、効用を最大にする最適化の問題を考察している。

以下モデルを与える。

(Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間とし、 $B_t, t \geq 0$, は 1 次元ブラウン運動、 $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s; s \in [0, t]\}$ とし、 $Y(t; s, x), t \geq s \geq 0$, は以下の確率微分方程式の解とする。

$$Y(t; s, x) = x + \int_s^t \sigma(Y(r; s, x))dB_r + \int_s^t b(Y(r; s, x))dr, \quad t \geq s$$

Φ_0 を証券の初期保有量、 S_0 を証券の初期価格、 $n \geq 1$ とし、時刻 $0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n$ でのみ証券の取引ができるものとする。また、 $g_n : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ は単調非減少かつ連続微分可能な関数とする。時刻 k/n における証券の価格が $S > 0$ であり、時刻 $(k+1)/n$ において $a \geq 0$ の証券を売却したとき、証券の価格 S' は

$$S' = \exp(Y((k+1)/n; k/n, \log S - g_n(a)))$$

となり、取引は価格 S' で行われるものとする。今、金利をゼロとすると、時刻 k/n における売却前の証券の保有量を φ_k^n とすると $\varphi_k^n, k = 0, 1, \dots, n$, は

- (1) $\varphi_0^n = \Phi_0, \varphi_{k-1}^n \geq \varphi_k^n, k = 1, \dots, n, \varphi_n^n \geq 0$,
- (2) $\varphi_k^n, k = 1, \dots, n$, は $\mathcal{F}_{(k-1)/n}$ -可測、を満たす。さらに、時刻 k/n における証券の価格及び売却益の総和、 S_k^n 及び W_k^n は

$$S_k^n = \exp(Y(k/n; (k-1)/n, \log S_{k-1}^n - g_n(\varphi_{k-1}^n - \varphi_k^n)), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

$$W_{k+1}^n = W_k^n + (\varphi_{k-1}^n - \varphi_k^n)S_k^n, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$S_{-1}^n = S_0, \quad W_0^n = 0$$

で決められていく。

本論文では、効用関数 $u: [0, \infty) \times [0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ に対して

$$V_{k/n}^n(w, \Phi_0, S_0) = \sup E[u(w + W_k^n, \varphi_k^n, S_k^n)]$$

(\sup は許された戦略全体の下でとる) を考えた。

論文では、ある単調非減少関数 h が存在して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in [0, \Phi_0]} \left| \frac{d}{dt} g_n(y) - h(y) \right| = 0$$

が成り立つという仮定の下で、関数 $V_{k/n}^n$ の $n \rightarrow \infty$ における挙動を調べ、それが、ある HJB 方程式の粘性解となることを示している。

特に興味深い結論として、 h が有界な場合は、極めて短期間の間に証券を売却するのが最適となるが、 h が非有界の場合は長期的に売却することが最適であることが示されている。これはマーケットインパクトの構造により最適戦略が質的に異なることを意味しており、実務に対する示唆を与えている。

論文ではまた、強混合的なノイズを持つ過去の履歴に強く依存した確率差分方程式の極限についても論じており、ある強混合性の条件の下で履歴依存型の伊藤型確率微分方程式へ収束することが示されている。この結果は従来のマルコフ型確率微分方程式への極限定理の拡張であるが、単純な形式的拡張ではない。状態が有限次元から無限次元となるため新しい混合条件を導入するなどの多くのアイデアを用いて得られた結果である。

このように本論文ではマーケットインパクトに関して新しい視点を与えると同時に、ファイナンスのモデルに関連した確率過程の極限定理を示しており高く評価できるものである。

よって、論文提出者 加藤 恭 は、博士 (数理学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。