論文の内容の要旨

論文題目 : Mapping class groups, groups of homology cobordisms of surfaces and invariants of 3-manifolds
(和訳：曲面の写像類群, ホモロジー同境のなす群と 3 次元多様体の不変量)

氏名 : 逆井 卓也

本論文は次の 2 部構成となっている.

- Johnson 準同型と曲面の写像類群の部分群の有理コホモロジー.
- 曲面のホモロジー同境全体のなす群の構造.

これらの内容は独立しており, どちらからも読み始めることができる. しかしながら, 2 つの共通部分として曲面の写像類群があることを注意しておく. 曲面の写像類群の役割は多岐にわたるが, 位相幾何の視点からは, 曲面束のモノドロミーとしてのはたらき, 写像トーラスや Heegaard 分解などにみられるような低次元多様体の構成要素としてのはたらきなどが代表的である. 本論文の第 1 部は前者, 第 2 部は後者の立場に近い.

第 1 部の主題は写像類群の部分群の有理コホモロジーである. よく知られているように, 写像類群のコホモロジーは曲面束の特性類を与える. さらに, 写像類群の曲面のホモロジーへの作用の核である Torelli 群を考えると, そのコホモロジーは, 底空間の基本群がファイバーのホモロジーに自明に作用するような曲面束の特性類となっている. 本論文ではまず, この Torelli 群のコホモロジーに注目する. Torelli 群は, 写像類群より複雑な構造をもっているが, Johnson は一連の研究のなかで, 現在第 1 Johnson 準同型と呼ばれている有限生成自由アーベル群への準同型を定義し, Birman-Craggs 準同型による捩れ元の部分とあわせて, Torelli 群のアーベル化を決定した.

いま第 1 Johnson 準同型を Torelli 群の「近似」とみなし, Torelli 群との差をコホモロジーの視点で見てみる. すなわち, 第 1 Johnson 準同型が誘導する有理コホモロジーの間の準同型を考え, その核と像を決定することを考える. 1 次の部分は Johnson が示したように同型となっている. さて, この誘導準同型の定義域はトーラスのコホモロジー環そのものであり, その構造は簡明であるが, ベクトル空間としての次元は, 曲

面の種数やコホモロジーの次数の増加に伴って急激に大きくなる. そこで Johnson 準同型の写像類群同変性に注目すると, 誘導準同型の核は, 有理数係数のシンプレクティック群 $Sp(2g,\mathbb{Q})$-加群である定義域の中の $Sp(2g,\mathbb{Q})$-部分加群になっていることがわかる. こうして, 問題を $Sp(2g,\mathbb{Q})$ の表現論という「対称性」を利用して考えることができる.

2 次の部分については, Hain や森田茂之氏によって解決され, 非自明な核が存在することが示されている. 証明は, Sullivan の完全列を用いて核に入る部分を特定し, 残りの核に入らない部分を Torelli 群の可換部分群の基本類 (アーベリアンサイクルと呼ばれている) を用いて具体的に評価することによってなされている.

主結果の 1 つ目は 3 次の部分に関するものである. 具体的には, 考えている誘導準同型の定義域は安定域において 24 個の既約成分に分解するが, まずそのうちの 23 個の成分に関して, 核に入るか否かを決定する. それは, 2 次のところで現れた核とのカップ積を調べたり, 3 次のアーベリアンサイクルを構成して評価することによってなされる. 残りの 1 つの成分に関しては, その答えが得られていないが, それが核に入るための必要十分条件を, 写像類群のコホモロジーの元である Morita-Miller-Mumford 類たちの間の Torelli 群上でのある関係式の成否によって表す. この問題は偶数番目の Morita-Miller-Mumford 類が Torelli 群上で非自明か, という予てからの問題と密接に関係している. 本来は 4 次以上のコホモロジーの問題であるが, 得られた同値性は, その問題の一部が 3 次のコホモロジーと関連しているということを示唆していることに注意する.

続いて, 第 1 Johnson 準同型の核 (Johnson 核と呼ばれる) を考える. この群は Johnson によって, 曲面上の分離単純閉曲線に沿っての Dehn twist たちが生成する群と一致することが示されているが, 定義の簡明さに反して, その理解はあまり進んでいない. 森田氏の結果に見られるように, この群はホモロジー 3 球面の Casson 不変量や曲面束の 2 次特性類との関連をもっており, その構造は興味深いものとなっている.

Johnson 核に対して, 第 2 Johhnson 準同型と呼ばれる, 有限生成自由アーベル群への写像類群同変な準同型が定義される. 主結果の 2 つ目は, 第 2 Johnson 準同型が誘導する 2 次の有理コホモロジーの間の準同型の核の決定である. 証明の基本的な方針は第 1 Johnson 準同型のときと同様であるが, その中で Johnson 準同型の Lie 代数準同型としての記述が証明の鍵となり, 結果として, 核はより深い第 4 Johnson 準同型の像として現れる既約成分と一致する.

こうして, Torelli 群や Johnson 核の低次の有理コホモロジーの次元の下からの評価 (無限次元の可能性もある) が得られる. しかしながら, ここで得られたものはすべてアーベリアンサイクルによって評価可能であり, これですべてであるとは考えられない. これらの外にある非自明な類 (Torelli 群の 3 次に現れたものが第 1 候補である) をみつけることは今後の課題である.

第 2 部の主題は曲面のホモロジー同境全体のなす群の構造であり, 主として, 閉曲面から 1 つの開円板を取り去った曲面のホモロジー同境と境界のマーキングを組にしたホモロジーシリンダーと呼ばれるものを考察する. それらの同型類全体の集合には自然な方法でモノイドの構造が入る. ホモロジーシリンダーは葉廣和夫氏によって, クラスパー手術の理論の応用に適した対象として導入され, それをきっかけとして閉 3 次元多様体の有限型不変量との関連とともに体系的な研究がなされてきた. ホモロジー 3 球面や pure string link (純くみひもの一般化) から標準的なやり方でホモロジーシリンダーを作ることができる. また, 与えられたホモロジーシリンダーに対し, マーキングを写像類群の元を用いて変えることにより異なるホモロジーシリンダーができる. このように, ホモロジーシリンダーは, 3 次元多様体論において重要な役割を担っている対象を同時に考えることができるものであり, それ故, それらのなす集合をモノイドの構造を用いて調べていくことは非常に有用であると思われる.

ホモロジーシリンダーの研究の 1 つの方法として, Garoufalidis や Levine によって導入されたホモロジーシリンダーのホモロジー同境群 $\mathcal{H}_{g,1}$ を考察するというものがある. これは, ホモロジーシリンダーを閉じるという操作により, 閉 3 次元多様体をホモロジー同境を法として考えることとも繋がっている. 第 2 部では, この群 $\mathcal{H}_{g,1}$ の構造について得られた結果を述べる.

まず, 群 $\mathcal{H}_{g,1}$ が写像類群のある意味での拡大であるという観点から, 写像類群における Dehn-Nielsen の

定理を $\mathcal{H}_{g,1}$ に対して拡張する. Stallings の定理を用いて, Garoufalidis-Levine は自由群の冪零完備化の自己同型群への表現として Dehn-Nielsen の定理の拡張を構成したが, その表現先は $\mathcal{H}_{g,1}$ を表現するものとしては若干大きい. 本論文では Levine によって導入された自由群の acyclic closure なる群を用い, その自己同型群の部分群として Dehn-Nielsen の定理の拡張を与える. 自由群の acyclic closure を用いることの有用性の根拠のひとつとして, その自己同型群が, $\mathcal{H}_{g,1}$ から基本群に関する情報を抽出して得られる群と自然に同型であるということが挙げられる. なお, 得られた表現は単射でないことを注意しておく.

次に自由群の acyclic closure の自己同型群に関する Johnson 準同型を記述する. Johnson 準同型の像の決定の問題は写像類群や自由群の自己同型群において重要な問題となっているが, いま考えている状況では簡単な考察ですべて決定することができる. これらの群の位置関係が如実に表れている例となっている. 続いて Magnus 表現の拡張を行う. これは, Le Dimet や Kirk-Livingston-Wang による Gassner 表現の string link への拡張に対応している. 拡張された Magnus 表現は, それ自身が $\mathcal{H}_{g,1}$ の行列値の不変量であるが, 後述の不変量の構成においても広く用いられる重要な研究道具となっている.

以後の章では, 関連する $\mathcal{H}_{g,1}$ の不変量を構成し, その性質を調べていく. 不変量の中には, 写像類群上で自明となるものもあり, その過程は写像類群の理論の拡張にとどまっていない. 例として, ホモロジーシリンダーを閉じて得られる閉 3 次元多様体を用いたボルディズム不変量, Atiyah-Patodi-Singer による ρ-不変量を応用した不変量, Cochran や Harvey らによる非可換 Alexander 不変量の応用した不変量などがある. これらの不変量を調べることにより, ホモロジーシリンダーが豊富に存在することや, それぞれの不変量の特徴, 相互関係をみてとることができる.