

論文審査の結果の要旨

氏名 逆井 卓也

向きづけ可能な閉曲面の写像類群は、代数幾何学、複素解析学、位相幾何学、微分幾何学、さらには数理物理学等、数学の多くの分野に関わる極めて重要な研究対象である。位相幾何学の立場からは、曲面バンドルのトポロジー、および Heegaard 分解を通して 3次元多様体論との関わりが、二つの重要なテーマとなる。論文提出者の逆井氏は、これら双方の観点からの写像類群の研究を行い、いくつかの結果を得た。本論文は二つの部分からなり、第一部は前者、第二部は後者の観点からの結果を述べたものである。

第一部のテーマは、写像類群の種々の部分群の有理係数コホモロジー群に関するものである。写像類群には Johnson フィルトレーションと呼ばれるフィルトレーションが定義され、その第 k 番目の部分群からは、第 k Johnson 準同型写像と呼ばれる、あるアーベル群への準同型写像が定義されている。第一の部分群は、曲面のコホモロジー群に自明に作用する写像類全体の成す部分群として定義される Torelli 群と呼ばれる部分群であり、また第二の部分群は、Johnson 核あるいは Johnson 部分群と呼ばれ、いずれも写像類群の極めて重要な正規部分群である。

第一 Johnson 準同型写像が有理コホモロジー群に誘導する準同型写像は、種数が 3 以上の場合、次数 1 では同型であることは Johnson 自身の基本定理である。また次数 2 においては、Hain および森田の仕事により完全に決定されている。逆井氏は、次数 3 の場合を研究し、一つの未確定の部分を除き決定した。つぎに第二 Johnson 準同型写像が有理コホモロジー群に誘導する準同型を研究し、ここでは、次数 2 の場合を完全に決定した。これにより Johnson 核の 2次元有理コホモロジー群の次元の下からの評価を得た。この評価は、現在知られている範囲で最良の評価を与えるものである。

第二部のテーマは、ホモロジーシリンダーのコホモロジー同境界類全体の成す群の構造の研究である。ホモロジーシリンダーの概念は、葉廣氏および Goussarov により独立に導入され、3次元多様体論、とくに有限型不変量の理論において、重要な役割を果たしてきている。一方 Garoufalidis-Levine は、ホモロジーシリンダーのコホモロジー同境界類を考え、それら全体が写像類群を自然な部分群として含む、ある大きな群をなすことを示し、その構造の研究を開始した。しかし、この群については、現状では未知のことが極めて多く、神秘的な群ともいえるものである。

逆井氏は、この群に関する組織的な研究を行い、いくつかの重要な結果を得た。まず Levine により 1980 年代末に導入された、群の acyclic closure の概念を発展的に駆

使うことにより、写像類に関する古典的な定理である Dehn-Nielsen の定理の、ホモロジーシリンダーのホモロジー同境類全体の成す群に対する一般化を定式化し、それを証明した。つぎに、逆井氏は、自由群の自己同型群や写像類群に対して定義される、古典的な Magnus 表現を、この群に対して拡張定義した。これらの結果は、この群のこれからの研究にとって基本的な定理となるものと思われる。

最後に逆井氏は、上記の諸道具を用いることにより、上記の群に関する種々の不変量を定義し、それらの性質を調べた。たとえば、ホモロジーシリンダーを閉じて得られる 3 次元多様体を用いたボルディズム不変量、あるいはある種の非可換 Alexander 多項式不変量等である。これにより、この群が写像類群より極めて大きいことが端的に示されている。

以上のように論文提出者の研究は、写像類群およびホモロジーシリンダーのホモロジー同境類全体の成す群に関して、いくつかの新しい知見を与えるものであり、これらの群の構造の研究に貢献するものである。

よって、論文提出者 逆井卓也 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。