論文の内容の要旨

論文題目: Studies on surface-knots using quandles and quandle homology theory
(カンドル及びカンドルホモロジー理論を用いた曲面結び目の研究)

氏名: 田中 心

曲面結び目とは, 4 次元ユークリッド空間内に局所平坦に埋め込まれた連結有向閉曲面の事であり, 非連結な有向閉曲面の場合には曲面絡み目と呼ばれる. Carter-Saito ら [5] によって, 図式を用いた曲面結び目の研究が発展してきている. ここで図式とは, 曲面絡み目を 3 次元ユークリッド空間へ射影した像（の特異点集合に高さの情報を与えたもの）の事である. 曲面結び目理論の最終目標は, 曲面結び目の全同位による同値類の分類であり, 同値類を区別する為に様々な不変量が考えられてきた. 例えば, 補空間のホモトピー型に関わる不変量（曲面結び目群など）や, 補空間の無限巡回被覆空間から得られるホモロジー群に関わる不変量（アレキサンダー多項式など）は古くから知られていた. 最近, カンドルという代数系を用いた曲面結び目不変量（カンドル彩色数 [8, 13] やカンドルコサイクル不変量 [3] など）が発見され, 様々な研究がなされている. これらの不変量は図式を用いて定義される為, 図式的手法と非常に相性が良い. 本論文では, カンドルやそれに伴うホモロジー理論から構成される不変量を用いて, 曲面結び目を研究した.

本論文で主に扱う不変量は, 結び目カンドル [8, 13]（或いは, カンドル彩色数）と基本類 [4]（或いは, カンドルコサイクル不変量）である. ここで, 結び目カンドルとは, カンドル彩色数に関する普遍的な対象物であり, また基本類とは, カンドルコサイクル不変量に関する普遍的な対象物である. 不変量が与えられた際に, 我々が知りたい事は以下の二点であろう.

- その不変量から曲面結び目のどのような情報が読み取れるか？
- その不変量はどの程度曲面結び目を区別するのか？

第一論文と第二論文では一番目の視点から, 第三論文では二番目の視点から, それぞれ研究を行った.

1. 本論文の内容

1.1. 第一論文.

題目: On surface-links represented by diagrams with two or three triple points
(J. Knot Theory Ramifications 14 (2005), no. 8, 963–978. に掲載)

この論文では, 曲面絡み目に対して generalized fundamental class という不変量を定義した. これは, 結び目カンドルの3次 generalized quandle homology group [1] に値をとる不変量である. さらに, 三重点を2個又は3個持つ図式によって表される曲面絡み目に対して, generalized fundamental class の取り得る値を分類した. 分類結果からは, 「三重点を2個又は3個持つ図式によって表される曲面絡み目の generalized fundamental class はねじれ元である」という系や, 「admissible なカンドルに関する generalized quandle cocycle invariant が消えていないならば, 最小三重点数は4以上である」という系が得られる. 後者は, 以下で述べる Satoh-Shima らの定理の拡張になっており, 応用として, 「奇素数 p に対して, $(2,p)$ トーラス結び目から得られた2ツイストスパン球面結び目を K_p とした時, 任意の曲面結び目 F と K_p の連結和 $F\#K_p$ の最小三重点数は4以上である」事も示せた.

曲面絡み目の最小三重点数とは, 同じ曲面絡み目を表す図式の中で三重点の個数の最小値として定義されるものである. 最小三重点数が0であるような曲面絡み目は擬リボン曲面絡み目と呼ばれており, 無限に存在する事が知られている. 最小三重点数が正である場合にその値を決定することは困難であったが, Satoh-Shima ら [14] はカンドルコサイクル不変量を用いて, 「2ツイストスパン三葉結び目の最小三重点数が4である」という事を示した. その中で彼らは, 「位数3の二面体カンドルに関するカンドルコサイクル不変量が消えていないならば, 最小三重点数は4以上である」という議論をしていた. 彼らの証明をよく見直す事で, 彼らの議論の本質がカンドルコサイクル不変量そのものではなく, 曲面絡み目から決まる「基本類 (fundamental class)」にあることが分かった. そこで, 現在知られている一番強いコサイクル不変量である generalized quandle cocycle invariant [2] をホモロジー論的に解釈し, generalized fundamental class という曲面結び目不変量を定義した. また, 最小三重点数が1以上3以下の場合に関しては, Satoh により「最小三重点数が1であるような曲面絡み目は存在しない」事や, 「球面結び目ならば, 最小三重点数が2や3のものは存在しない」事が示されている. これらを踏まえて, 三重点を2個又は3個持つ図式によって表される曲面絡み目に注目した.

1.2. 第二論文.

題目: The braid index of surface-knots and quandle colorings
(Illinois J. Math. 49 (2005), no. 2, 517–522. に掲載)

一次元結び目理論と同様に, 曲面結び目理論においてもブレイドの概念（曲面ブレイド [9]）が Viro, Rudolph らによって定義されており, また Kamada によって「任意の曲面結び目は単純曲面ブレイドの閉包として表される」という事が示されている. 同じ曲面結び目を表す単純曲面ブレイドの中で, 曲面の枚数の最小値を曲面結び目のブレイド指数と呼ぶ. 定義より直ちに, ブレイド指数が2以下ならば自明な曲面結び目である事が分かる. ブレイド指数が3以上の場合に関しては, 「ブレイド指数が3であるような曲面結び目はリボン型である」という特徴付けや, 「$(2,n)$ トーラス結び目から得られたスパン球面結び目のブレイド指数は3である」という結果が, Kamada により得られていた. Kamada-Satoh-Takabayashi ら [10] は, 連結和によるブレイド指数の振る舞いを調べ, 「$(2,n)$ トーラス結び目から得られたスパン球面結び目を, 二つ連結和してできる球面結び目のブレイド指数は4である」という事を示した. この中で彼らは, 1融合リボン球面結び目のアレキサンダー加群の性質を用

いてブレイド指数を下から評価したが, この方法で下からの評価を良くする事は難しいと思われる. これらを踏まえた上で, ブレイド指数を下から評価するという事, またブレイド指数が5以上であるような具体例の決定に興味をもち研究した.

この論文では, 曲面結び目のブレイド指数をカンドル彩色数によって下から評価する定理を得た. この定理は, 結び目カンドルの生成元の個数と曲面ブレイドの分岐点の関係を明らかにする事により証明される. 得られた定理を用いて, 「$(2,n)$ トーラス結び目から得られたスパン球面結び目を, s 個連結和してできた球面結び目のブレイド指数は $s+2$ である」という結果を得た. さらに, 「任意の整数 $k \geq 3$ と $g \geq 0$ に対して, ブレイド指数が k である種数 g のリボン曲面結び目が加算無限個存在する」という系や, 「任意の整数 $k \geq 4$ に対して, ブレイド指数が k である非リボン球面結び目が存在する」という系も得られた.

1.3. 第三論文.

題目: Inequivalent surface-knots with the same knot quandle

曲面結び目 $F \subset \mathbb{R}^4$ に対する不変量として, 結び目カンドル $Q(F)$ と基本類 $[F] \in H_3^{\mathrm{Q}}(Q(F))$ を考える. ここで $H_3^{\mathrm{Q}}(Q(F))$ は, 結び目カンドル $Q(F)$ の3次カンドルホモロジー群 (quandle homology group) である. この論文では, 「これら二つの不変量はどのくらい強力であるのか?」という問いに対して, 一次元結び目理論に於ける状況と比較するという立場から考察した.

曲面結び目の場合と同様に, 一次元結び目 $k \subset \mathbb{R}^3$ に対しても, 結び目カンドル $Q(k)$ と基本類 $[k] \in H_2^{\mathrm{Q}}(Q(k))$ が定義される. 一次元結び目 k に対して, $-k$ を k の向きを逆にした結び目とし, k^* を k の鏡像を取った結び目とする. この時, 一次元結び目 k と k' に対して次のことが知られている.

- カンドル同型写像 $\phi : Q(k) \to Q(k')$ が存在するならば, k は k' と同値であるか, 或いは $-(k')^*$ と同値である.
- カンドル同型写像 $\phi : Q(k) \to Q(k')$ が存在し, ϕ がホモロジー群に誘導する写像 ϕ_* が $\phi_*[k] = [k']$ を満たすならば, k と k' は同値である.

一番目の事実は Joyce [8] と Matveev [13] によって独立に示された定理であり, 「$Q(k)$ が "ほぼ" 完全な不変量である」事を意味している. また二番目の事実は Eisermann [6] によって示された定理であり, 「$Q(k)$ と $[k]$ の組が完全不変量である」事を意味している.

そこで, 「曲面結び目の種数を固定した際に, Joyce-Matveev の定理や Eisermann の定理は, 曲面結び目に対して成立するのか?」という問題を考察し, 否定的な解答を得た. 具体的には, 「同じ結び目カンドルを持つような, 任意有限個の異なる (種数 g の) 曲面結び目が存在する」事や, 「同じ結び目カンドルと基本類を持つような, 二つの異なる (種数 g の) 曲面結び目が存在する」事を示した.

2. 参考論文

題目: Khovanov-Jacobsson numbers and invariants of surface-knots
derived from Bar-Natan's theory
(Proc. Amer. Math. Soc. に掲載予定)

Khovanov [11] は, 向き付けられた1次元絡み目に対して新しいコホモロジー理論を構築し, 絡み目不変量となる事を示した. このコホモロジー理論には, (次数付けられた) Euler 標数を取ると絡み目の Jones 多項式が回復されるという特性がある. また, Jacobsson [7] と Khovanov [12] は独立に, Khovanov 理論が絡み目コボルディズムに関して関手的である事を示した. 特に, 曲面結び目 $F \subset \mathbb{R}^4 (\cong \mathbb{R}^3 \times (0,1))$ を

空絡み目間の絡み目コボルディズムとみなす事で, Khovanov-Jacobsson 数と呼ばれる曲面結び目不変量 $KJ(F) \in \mathbb{Z}$ を得る. 定義より, $\chi(F) \neq 0$ であるような曲面結び目 F に対して $KJ(F) = 0$ となる事や, 自明な T^2-knot F ($\chi(F) = 0$ である曲面結び目) に対して $KJ(F) = 2$ となる事はすぐに分かる. また, あるクラスの T^2-knot に対しては Khovanov-Jacobsson 数が自明となってしまう (つまり, $KJ(F) = 2$ となる) 事が Carter-Saito-Satoh らにより示されていた. しかし, 一般の T^2-knot については計算されておらず, Khovanov-Jacobsson 数が曲面結び目不変量としてどのくらい意味があるのか知られていなかった.

この論文では, Bar-Natan により定義された絡み目に対するコホモロジー理論 (Khovanov 理論の変種) を用いて, Khovanov-Jacobsson 数の拡張であるような不変量 $BN(F) \in \mathbb{Z}[t]$ を定義し, 「$BN(F)$ は曲面結び目の種数で決定される」という定理を得た. 不変量 $BN(F)$ には,

$$BN(F)|_{t=0} = KJ(F)$$

という性質があるので, 上の定理より「任意の T^2-knot F に対して, $KJ(F) = 2$ である」という系が得られた.

謝辞

この博士論文執筆に際して, 温かく励まし御指導下さった松本幸夫先生に深く感謝致します. また, 筆者の研究活動を支援してくださった東京大学21世紀COEプログラム, 日本学術振興会にも感謝致します.

References

[1] N. Andruskiewitsch, M. Graña, *From racks to pointed Hopf algebras,* Adv. Math. **178** (2003), no. 2, 177–243.

[2] J. S. Carter, M. Elhamdadi, M. Graña, M. Saito, *Cocycle knot invariants from quandle modules and generalized quandle cohomology,* Osaka J. Math. **42** (2005), no. 3, 499–541.

[3] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford and M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces,* Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 10, 3947–3989.

[4] J. S. Carter, S. Kamada, M. Saito, *Diagrammatic computations for quandles and cocycle knot invariants,* Contemp. Math., **318**, 51–74.

[5] J. S. Carter and M. Saito, "Knotted surfaces and their diagrams", Math. Surveys and Monographs **55**, Amer. Math. Soc., 1998.

[6] M. Eisermann, *Homological characterization of the unknot,* J. Pure Appl. Algebra **177** (2003), no. 2, 131–157.

[7] M. Jacobsson, *An invariant of link cobordisms from Khovanov's homology theory,* Algebr. Geom. Topol. **4** (2004), 1211–1251.

[8] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle,* J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), no. 1, 37–65.

[9] S. Kamada, "Braid and Knot Theory in Dimension Four", Math. Surveys and Monographs **95**, Amer. Math. Soc., 2002.

[10] S. Kamada, S. Satoh and M. Takabayashi, *The braid index is not additive for the connected sum of 2-knots,* to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[11] M. Khovanov, *A categorification of the Jones polynomial,* Duke Math. J. **101** (2000), no. 3, 359–426.

[12] M. Khovanov, *An invariant of tangle cobordisms,* Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), no. 1, 315–327.

[13] S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory,* (Russian) Mat. Sb. (N.S.) **119(161)** (1982), no. 1, 78–88, 160.

[14] S. Satoh and A. Shima, *The 2-twist-spun trefoil has the triple point number four,* Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), no. 3, 1007–1024.