論文審査の結果の要旨

氏名　田中　心

約20年ほど前に，Joyce(1982), Matveev(1982) 達によりクワンドル (quandle) またはカンドルと呼ばれる代数系が導入され，結び目理論に応用されるようになった．クワンドルとは2項演算を備えた代数系 $(X,*)$ であって，次の3条件を満たすものである：

(i) $a*a=a, \quad \forall a \in X$,

(ii) $\forall a,\ b \in X$ に対し，$c*b=a$ であるような $c \in X$ が一意的に存在する．

(iii) $(a*b)*c=(a*c)*(b*c), \quad \forall a,\ b,\ c\ \in X$.

これらの条件は結び目理論で基本的な Reidemeister 移動の代数的表現と考えられる．

論文提出者　田中　心　はクワンドル理論を応用して，4次元空間のなかの結ばれた閉曲面，いわゆる「曲面結び目」を研究した．論文は3部からなっている．

第1部では，曲面結び目の最小三重点数について研究している．曲面結び目，あるいはより一般に，必ずしも連結でない曲面絡み目の最小三重点数とは，4次元空間 $\mathbb{R}^4$ 内で結ばれている曲面 K を自然な射影 $p:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ により3次元空間 $\mathbb{R}^3$ に射影したとき，像 $p(K)$ の持つ三重点の個数を数え，K を $\mathbb{R}^4$ のなかでアイソトピーで動かしてその三重点数の最小値を考えたものである．与えられた曲面結び目 K について最小三重点数 $t(K)$ を求めることは容易ではない．佐藤・志摩 (2004) はクワンドルのコホモロジー論から導かれる「クワンドル・コサイクル不変量」を用いて，「2ツイストスパン3葉結び目」の最小三重点数が4であることを証明した．この結果を契機として，曲面絡み目の最小三重点数を求めるいろいろな研究がなされた．とくに佐藤 (2005) は最小三重点数が2または3であるような球面結び目は存在しないことを証明している．

論文提出者は一般の曲面絡み目について研究し，一般基本類と呼ばれる3次元クワンドルホモロジー類を定義し，三重点が2個あるいは3個であるような射影をもつ曲面絡み目の一般基本類の形を分類した．この定理の系として，

系．「認容的な」クワンドルのコサイクルに一般基本類を代入して得られる「一般クワンドル・コサイクル不変量」が0でなければ，そのような曲面絡み

目の最小三重点数は4以上である．

ということが分かる．応用として，2ツイストスパン3葉結び目と任意の曲面結び目との連結和の最小三重点数は4以上であることが示されている．

第2部は，曲面結び目のブレイド指数を扱っている．Viro(1990)と鎌田(1992)により，曲面結び目は2次元ブレイドの閉包として得られる．曲面結び目について，その曲面結び目を閉包として与える2次元ブレイドの次数の最小値を曲面結び目のブレイド指数という．さて，曲面結び目Kの$\mathbb{R}^3$への射影$p(K)$に4次元方向の高さの情報を付け加えたものを曲面結び目の図式という．これから出発して，曲面結び目の「結び目クワンドル」という不変量を構成することができる．結び目クワンドルから任意のクワンドルXへのクワンドル準同型のことをXによる彩色という．とくに，与えられた有限クワンドルXによる全ての可能な彩色の数は曲面結び目の不変量になる．第2部の主結果は「もし，位数nのクワンドルにより可能な彩色の数がn^s以上であれば，その結び面のブレイド指数は$s+1$以上である」というものである．応用として，任意の正の整数kについて，ブレイド指数がkであるような曲面結び目が存在することを証明している．

第3部では，結び目クワンドルと3次の基本類がどの程度，曲面結び目を決定するかという問題を扱い，次の結果を証明している：

定理．結び目クワンドルが同型で，その同型で基本類も対応しているような，同型でない曲面結び目が存在する．

以上のように，この論文の結果はクワンドルの曲面結び目の応用について，いくつかの異なる側面から豊かな可能性を示したもので，クワンドルを用いた曲面結び目の研究に多大の示唆を与えるものである．

よって，論文提出者　田中　心　は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．