論文の内容の要旨

論文題目: COMPACT QUANTUM ERGODIC SYSTEMS

(コンパクト量子エルゴード系)

氏　　名: 戸松 玲治

本論文の主眼は，コンパクト量子群のエルゴード作用の一般的研究と量子群 $SU_q(2)$ の右余イデアルの分類におかれている．**コンパクト量子群**G とは，単位的 C^* 環 A と余積 δ の組 $G=(A,\delta)$ のことである．このとき A を G 上の連続関数環と意識する為に (非可換環ではあるが)，しばしば A は $C(G)$ と記される．これは「変形した群」である量子群を関数環の立場から把握する Woronowicz の提唱したアプローチであり, Drinfel'd や Jimbo らによる包絡環からのアプローチとはリー群とリー環のように密接に関係している．量子群 G の作用素環 (C^* 環や von Neumann 環)A への (右) 作用とは，単射的 $*$ 準同型 $\alpha\colon A\longrightarrow A\otimes C(G)$ で $(\alpha\otimes \mathrm{id})\circ\alpha=(\mathrm{id}\otimes\delta)\circ\alpha$ を満たすもののことである．とくにその固定点環 A^α が $\mathbb{C}$ になるとき，**エルゴード的**な作用であるという．

コンパクト群のエルゴード作用については多くの研究があるが，それらの中でも A. Wassermann による一連の研究 [6, 7, 8] の重要性は際立っている．[6] では，エルゴード系の同変 K 理論が研究され **multiplicity map** の理論が展開されている．それを受けて [8] では，コンパクト群 $SU(2)$ のエルゴード系が全て決定される．この流れを簡単に説明しよう．コンパクト群 G のエルゴード系 $\{A,\alpha\}$ を用意する．有限生成射影的 (A,G) 加群全体 (正確には同値類たち) の成す群が同変 K 群 $K_0^G(A)$ である．Green-Julg 写像 j は $K_0^G(A)$ と $K_0(A\rtimes_\alpha G)$ の間の同型を導く．これらには自然に G の双対 $\widehat{G}$ が作用し表現環 $R(G)$ の加群となるが，j は $R(G)$ 加群としての同型でもあることが重要である．さて，エルゴード性から接合積環 $A\rtimes_\alpha G$ はコンパクト作用素の成す環 (行列環のようなもの)$\mathbb{K}(H_i)$ たちの直和 $\oplus_{i\in I}\mathbb{K}(H_i)$ と同型である．それゆえ K 群 $K_0(A\rtimes_\alpha G)$ は $\mathbb{Z}^I$ という格好をしており，

その $R(G)$ 加群の構造から準同型 $\mathbb{M}\colon R(G) \longrightarrow M_I(\mathbb{Z})$ が導かれる．写像 $\mathbb{M}$ は multiplicity map と呼ばれる．A. Wassermann は multiplicity map が常に同時固有ベクトルを持つこと，より正確には等式

$$\mathbb{M}(\pi)\mathbf{c} = d_\pi \mathbf{c}$$

が全ての既約表現 π(d_π はその次元) について成り立つような (無限) ベクトル $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^I$ が存在することを示した．この等式は $d_\pi = 2$ の場合に行列 $\mathbb{M}(\pi)$ を分類してしまうほど強力である ([2])．$G = SU(2)$，$\pi = \pi_{1/2}$ の場合にこの観察を適用して A の既約分解を解明し，エルゴード系 $\{A, \alpha\}$ の分類が行われたのであった．

私はコンパクト量子群のエルゴード作用についても同変 K 理論を研究してコンパクト量子群 $SU_q(2)$ のエルゴード系を分類しようと考えた．量子群の同変 K 群については先行する結果 [1, 5] を利用でき，エルゴード作用にたいして multiplicity map を構成するのはやさしい．しかしながら，一般のエルゴード系に対する同時固有ベクトルの存在証明はうまくいかなかった．これは群が量子化されたことで見せる「非トレース的」な振る舞いに起因する．そのため量子群 $SU_q(2)$ のエルゴード系すべてを分類することをあきらめて，小さなクラスについて分類した．それらが $SU_q(2)$ の**右余イデアル**である．

コンパクト量子群 G の右余イデアル A とは，$C(G)$ の (ノルム閉) 単位的 $*$ 部分環で $\delta(A) \subset A \otimes C(G)$ をみたすもののことである．この状況は，G が右移動作用で A を大域的に不変にしていると見直すとわかりやすい．G がコンパクト群であるとき，右余イデアルのなす集合と閉部分群のなす集合との間に次のような一対一対応が存在する．

$$\{\text{右余イデアル}\} \longleftrightarrow \{\text{閉部分群}\}$$

$$C(H \setminus G) \longleftrightarrow H.$$

それゆえコンパクト量子群の右余イデアルを非可換等質空間上の連続関数環と解釈してもよいであろう．$SU_q(2)$ の右余イデアルの例でよく知られたものとして，Podleś の量子球面族 $\{S^2_{q,\lambda}\}_\lambda$([4]) や後述の部分量子群 H による商空間上の連続関数環 $C(H \setminus G)$ がある．さて，G の右余イデアル A は自然にエルゴード系 $\{A, \delta\}$ をなすが，次の定理はこのエルゴード系に対する multiplicity map $\mathbb{M}$ には同時固有ベクトルが常に存在することを示す．

定理 (論文，Corollary 4.21) G をコンパクト量子群とする．$A \subset C(G)$ を右余イデアルとし，添字集合 I は同型 $A \rtimes_\delta G \cong \oplus_{i \in I} \mathbb{K}(H_i)$ に現れるものとする．e_i を $i \in I$ に対応する $A \rtimes_\delta G$ の極小射影とする．そのときベクトル $\mathbf{c} = (c_i)_{i \in I}$ が次の条件をみたすように存在する．

1. 各 c_i は 1 以上の整数であり，ある添字 $i_0 \in I$ に対して $c_{i_0} = 1$ である．

2. $\mathbf{c}$ は同時固有ベクトルである，より正確には等式

$$\mathbb{M}(\pi)\mathbf{c} = d_\pi \mathbf{c}$$

が全ての $\pi \in \widehat{G}$ について成り立つ．

3. 共変系 $\{A, G, \alpha\}$ と $\{e_{i_0} A \otimes \mathbb{K}(L^2(G)) e_{i_0}, G, \tilde{\alpha}\}$ は同型である.

上記定理中の記号の説明は論文を参照されたい．上で $G = SU_q(2)$, $\pi = \pi_{1/2}$ とすれば，右余イデアルの既約分解の許されうるいくつかのケースが列挙される．これらは $SU(2)$ や $SU_{-1}(2)$ の部分群の McKay 図で分類され，右余イデアルの**型**とか**タイプ**と呼ばれる．これらを逐一考察して，本当に矛盾なく存在するかどうかを観察することで分類を完成させる.

たとえば，右余イデアル A の既約分解が A_4^* 型，$\pi_0 \oplus \pi_3 \oplus \pi_4 \oplus 2\pi_6 \oplus \ldots$ であったとしよう．これは π_3 既約表現空間 H_{π_3} が A に同変に埋め込まれていることを示す．この写像を j，A の掛け算写像を $\mathrm{m}\colon A \otimes A \longrightarrow A$ と書こう．写像 $\mathrm{m} \circ (j \otimes j)$ はテンソル積表現空間 $H_{\pi_3} \otimes H_{\pi_3}$ から A への同変写像である．ところで分解 $H_{\pi_3} \otimes H_{\pi_3} \cong \oplus_{\ell=0}^{6} H_\ell$ のうち $\ell = 1, 2, 5$ にあたる表現空間は写像 $\mathrm{m} \circ (j \otimes j)$ の核空間に含まれるから，$j(H_{\pi_3})$ のベクトルから Clebsh-Gordan 分解係数を使って $\ell = 1, 2, 5$ の最高ウェイトベクトルを作ればそれらは 0 である．さらに [3] で与えられた $C(SU_q(2))$ の Peter-Weyl 分解を利用して $j(H_{\pi_3})$ のベクトルについての方程式ができあがる．この方程式が自明な解しか持たないならば，A_4^* 型右余イデアルはないと結論できる．実際には A_4^* 型を含めて多くの型が $|q| \neq 1$ の制約下でこの方法により棄却される．難しいのは非自明な解が見つかる場合である．これは q が負の場合に起こり，求めたベクトルが生成する右余イデアルが実際に望むタイプであることを示さねばならない．そのベクトルが低スピン (1/2 ぐらい) のものなら直接的な代数計算が可能である．しかし $q = -1$ の $\mathbb{T}_n$, D_n 型 ($n \geq 3$, 奇数) で実際に解析が必要となるように，もっと高スピンの所に生まれているのならもはや代数計算から帰結することは不可能といってよい．これらの場合次のように実現されることが判明する．$H = (C(H), \delta_H)$ を別の量子群とし，全射 $*$ 準同型 $r_H\colon C(G) \longrightarrow C(H)$ が $\delta_H \circ r_H = (r_H \otimes r_H) \circ \delta$ が存在する場合を考える．この状況は H が G の「量子部分群」であると思うと分かりやすい．そこで $B \subset C(H)$ を部分 $*$ 代数とする．このとき集合 $A = \{a \in C(G) \mid (r_H \otimes \mathrm{id})(\delta(a)) \in B \otimes C(G)\}$ は右余イデアルとなる．特に $B = \mathbb{C}$ の場合 $A = C(H \setminus G)$ と書かれる．さて分類結果は次のようになる.

定理 (論文，Theorem 6.1, 7.1, 8.1) $C(SU_q(2))$ の右余イデアル A は以下のものに限る.

(1) $0 < q < 1$ の時, 右余イデアルのタイプは, 1, $SU(2)$, $\mathbb{T}_n$ ($n \geq 2$), $\mathbb{T}$ と D_∞^* のいずれかであり, $\mathbb{T}$ 型の時には, Podleś の量子球面になる. それ以外の時には, 共役を除き一意的である.

(2) $-1 < q < 0$ の時, 右余イデアルのタイプは, 1, $SU(2)$, $\mathbb{T}_n$ ($n \geq 2$), $\mathbb{T}$, D_∞^* と D_1 のいずれかであり, $\mathbb{T}$ 型の時には, Podleś の量子球面になる. それ以外の時には, 共役を除き一意的である.

(3) $q = -1$ の時は次のようになる.

(a) A のタイプが, $\mathbb{T}_n$ 型 ($n \geq 3$ は奇数), 又は D_n 型 ($n \geq 1$ は奇数) でなければ, 閉部分群 $H \subset SO_{-1}(3)$ が唯一つ存在し, $A = C(H \setminus SO_{-1}(3))$ が成り立つ.

(b) A のタイプが $\mathbb{T}_n$ 型 ($n \geq 3$ は奇数) の時, A は $C(\mathbb{T}_n \setminus SU_{-1}(2))$, 又は $C^*(\eta^{\frac{n}{2}}, \widehat{\eta}^{\frac{n}{2}})$ に共役である.

(c) A のタイプが D_1 型の時は, A は $C(D_1 \setminus SU_{-1}(2))$ に共役である.

(d) A のタイプが D_n 型 ($n \geq 3$ は奇数), A は $C(D_n \setminus SU_{-1}(2))$, 又は $C^*(\eta^{\frac{n}{2}})$ に共役である.

$|q| \neq 1$ の場合, D^*_∞, D_1 型は量子球面でも商等質空間でもない右余イデアルである. $q = -1$ の場合, 右余イデアル $C^*(\eta^{\frac{n}{2}}, \widehat{\eta}^{\frac{n}{2}})$ と $C^*(\eta^{\frac{n}{2}})$ は商等質空間ではない. これらの定義は論文 (p.63) を参照されたい. エルゴード共変系としては, $C(\mathbb{T}_n \setminus SU_{-1}(2))$ と $C^*(\eta^{\frac{n}{2}}, \widehat{\eta}^{\frac{n}{2}})$ は非同型であるのに対して, $C(D_n \setminus SU_{-1}(2))$ は $C^*(\eta^{\frac{n}{2}})$ に同型であることも示される (論文, Proposition 8.11).

謝辞

東京大学の河東泰之, 白石潤一, 茨城大学の山上滋の各氏に格別なる感謝の意と敬意を表する. 論文内容に一層の磨きをかけられたのは山上氏から賜った示唆に富むアドバイスによる所が大きい. 論文完成までに出会った幾多の困難に気持がめげそうなときに, 白石氏はいつも温かく励ましてくださった. そして特に指導教官の河東氏は数学だけでなく, 英語指導など何事にも苦言なしに懐深く接してくださった. 最後に何年間も面倒をみていただいた数理科学研究科の皆様に心からのお礼と将来の活躍を約して謝辞とする.

参考文献

[1] S. Baaj, G. Skandalis, *C^*-algèbres de Hopf et théorie de Kasparov équivariante* (French) [Hopf C^*-algebras and equivariant Kasparov theory], K-Theory **2** (1989), no. 6, 683–721.

[2] F. M. Goodman, P. de la Harpe, V. F. R. Jones, *Coxeter graphs and towers of algebras*, Mathematical Sciences Research Institute Publications **14**, Springer-Verlag, New York, 1989.

[3] T. Masuda, K. Mimachi, Y. Nakagami, M. Noumi, K. Ueno, *Representations of the quantum group* $\mathrm{SU}_q(2)$ *and the little q-Jacobi polynomials*, J. Funct. Anal. **99** (1991), no. 2, 357–386.

[4] P. Podleś, *Quantum spheres*, Lett. Math. Phys. **14** (1987), no. 3, 193–202.

[5] R. Vergioux, *KK-théorie équivariante et opérateur de Julg-Valette pour les groupes quantiques*, thesis, universite Paris 7, 2002.

[6] A. Wassermann, *Ergodic actions of compact groups on operator algebras. I. General theory*, Ann. of Math. (2) **130** (1989), no. 2, 273–319.

[7] A. Wassermann, *Ergodic actions of compact groups on operator algebras. II. Classification of full multiplicity ergodic actions*, Canad. J. Math. **40** (1988), no. 6, 1482–1527.

[8] A. Wassermann, *Ergodic actions of compact groups on operator algebras. III. Classification for* SU(2), Invent. Math. **93** (1988), no. 2, 309–354.

[9] S. L. Woronowicz, *Twisted* SU(2) *group. An example of a noncommutative differential calculus*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **23** (1987), no. 1, 117–181.