

提出された論文は、有限生成と限定しない Coxeter 群の同型問題を論じたものである。Coxeter 群とは、次の形の生成元と基本関係 (Coxeter 表示と呼ぶ) をもつ群 W のことである。

$$W = \langle S \mid (st)^{m(s,t)} = 1 \text{ (} m(s,t) < \infty \text{ であるような } s, t \in S \text{ に対し)} \rangle$$

ここで $(m(s,t))_{s,t \in S}$ は自然数 (1 以上) または ∞ を成分とする対称な $|S| \times |S|$ 行列で、 $m(s,t) = 1 \iff s = t$ をみたすものである。歴史的には Euclid 空間の有限鏡映群がこの形の表示を持つことが H. S. M. Coxeter によって示されたことに始まり、Lie 群・Lie 環論やそれらに関連した (あるいは一般化した) ものの表現論、幾何学、組合せ論などと結びついて重要な役割を果たしてきた。

2 つの群 W と W' の Coxeter 群としての表示が異なっても、すなわち W の生成系 S から W' の生成系 S' への全単射 φ で $m(s,t) = m(\varphi(s), \varphi(t))$ をみたすものが存在しなくても、単なる群として W と W' が同型な場合があることは、有限 Coxeter 群の場合でもよく知られている。Coxeter 群の同型問題とは、狭義には 2 つの Coxeter 群の間に単なる群としての同型写像が存在するのはいつかを決定すること、広義にはそのような同型写像がいかなる性質を持つか、特に Coxeter 群の構造のどれほどの部分を保つかなどを調べることを意味する (1 つの Coxeter 群の Coxeter 群としての生成系にどれほどの多様性があるかを調べることに言ってもよい)。有限 Coxeter 群に関しては、答えは少なくとも専門家にはよく知られているが、一般の Coxeter 群の同型問題の本格的な研究が始まったのは 1990 年に A. M. Cohen によって狭義の同型問題が明文化されてからで、ここ 10 年ほどの間に B. Mühlherr らをはじめ多くの研究者によって活発に研究され、特に有限生成の場合には重要な一般的な予想および結果が得られて解決が近いと信じられるに至ったが、有限生成でない場合にはこの予想と結果だけでは解決しないこともわかっている。申請者の結果は、有限生成と限定しない Coxeter 群の同型問題に風穴をあけるべく、新たな手法を構築していくつかの根本的な問題に可能な限り一般的な形で答えるものである。

論文は 2 部構成で、第 1 部では同型問題と Coxeter 群の既約分解との関係を論じて、特に同型問題が既約 Coxeter 群の間の同型問題に帰着できることを有限生成に限定しない枠組みで示し、第 2 部では鏡映すなわち生成元のどれかと共役な元全体の集合との関係を論じて、特に 2 つの Coxeter 群の間の単なる群としての同型が鏡映全体の集合を保存するための十分条件を与えている。

$I \subset S$ に対し、 I の生成する部分群も I を生成系として Coxeter 群になるので、もし S を空でない部分集合 I, J に分割し、 I の任意の元と J の任意の元が可換であるようにできるなら、 W は S の部分集合の生成する自明でない Coxeter 群 2 個の直積になる。このとき W は可約、そうでないとき既約な Coxeter 群と呼ばれる。 S の部分集合で既約な Coxeter 群を生成するもののうち包含関係に関し極大なものは S の連結成分と呼ばれ、 W は S の連結成分の生成する既約な Coxeter 群 (W の既約成分と呼ばれる) 全部の (制限) 直積に分解する。これは W の既約分解と呼ばれる。第 1 部で申請者が行ったのは、 W と S を組にして考えた上での“単純なものへの分解”である Coxeter 群の既約分解を、単なる群としての直既約分解と結びつけることである。そして第 1 の主要な結果として、既約な無限 Coxeter 群は単なる群として直既約、すなわち単なる群として自明でない直積分解をもたないことを、有限生成に限定せずに示した。有限 Coxeter 群では既約であって

も単なる群として自明でない直積分解をもつものがあることはよく知られている。有限生成な Coxeter 群に対しては同様の結果をほぼ同時に L. Paris が示している (彼らの論文にも申請者の結果も引用されている) が, その方法は本質的に有限生成の場合にしか適用できない。申請者の方法は, 位数 2 の元で生成される W の正規部分群の中心化群をすべて決定してそれを用いるもので, これ自体も興味ある結果である。さらに申請者はこれを用い, 第 2 の主要な結果として, S, S' を生成系とする Coxeter 群 W, W' が単なる群として同型であるためには, それぞれの既約成分のうち有限群であるもの全部の (制限) 直積 (W の有限部分と呼ぶ) どうしが単なる群として同型であり, かつそれぞれの既約成分のうち無限群であるものの単なる群としての同型類の集合 (重複度こみ) が一致することが必要十分であることを示した。これにより, 有限生成に限定しない一般の Coxeter 群の同型問題は (無限) 既約 Coxeter 群の同型問題に帰着される。また申請者は, 一般の Coxeter 群 2 つの間の群同型がそれぞれの直既約分解をどのようにうつすかに関して, Krull-Remak-Schmidt の定理の状況と同様の結論が出ることも示している (この状況では Krull-Remak-Schmidt の定理の前提は成立していないので, 無限既約 Coxeter 群の直既約性から Krull-Remak-Schmidt によってこの結論を出すことはできない)。Coxeter 群に対する各種の基本的な結果は有限生成を仮定していることが多く, 申請者はこれらの結果を導く過程で有限生成を仮定しない手法を開発している。

第 2 部では単なる群としての同型が鏡映全体の集合を保存する条件を論じている。生成系 S, S' の指定された Coxeter 群 W, W' の間の同型に対し, “単なる群として同型” という最も弱い条件と, “生成系をこめて同型” (または S が S' と共役な生成系にうつる) という最も強い条件の間に, “ S から決まる鏡映全体の集合が S' から決まる鏡映全体の集合にうつる” という条件があり, これは単に論理的に両者の中間にあるというだけでなく, 特に有限生成 Coxeter 群の同型問題において, 最も弱い状況をこの中間状況に “変換” する手続きを与える結果と, この中間状況を最も強い状況に “変換” する手続きを与える有力な予想が提示されているという意味で, 同型問題における重要なステップをなすものである。申請者の結果は, 有限生成を仮定しない Coxeter 群において, この中間状況が成立するための十分条件を与えるものである。具体的には, W から W' への群同型 f があるとき, S の元 s と可換な (S に関する) 鏡映全体 (s 自身は除く) の生成する部分群 $W^{\perp s}$ は Coxeter 群になることが知られているが, その有限部分が単位群または s と共役な鏡映 1 個で生成される位数 2 の部分群ならば, $f(s)$ も W' の (S' に関する) 鏡映になることを示した。 W と S が具体的に与えられれば, $W^{\perp s}$ の生成系と基本関係は具体的に求めることができる (申請者の前の結果または他の結果の組合せ)。 S のすべての元がこの条件をみたせば W から任意の Coxeter 群 W' への群同型は鏡映全体の集合を鏡映全体の集合にうつす (W の単なる群としての任意の自己同型が鏡映全体の集合を保つといってもよい)。特に, 提出論文には含まれていないが, 申請者のプレプリントに含まれる結果を組合せると, (有限生成と限らない) 無限既約 Coxeter 群で, はじめの記号で $m(s, t)$ がすべて有限のものや, S の任意の 2 元 s, t が $s = s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n = t$ ($s_i \in S, m(s_{i-1}, s_i)$ が奇数) のように結ばれるものはこの性質を持つことが示される。こうした結果を得るための方法として, 申請者は Coxeter 群 W_1 と他の群 G の半直積 $W_1 \rtimes G$ で, G の W_1 への作用が W_1 の Coxeter 群としての生成系 S_1 を保存するようなものに対し, その位数 2 の元でほとんど central なもの (中心化群が群全体の中で指数有限になるもの) の形を具体的に全部決定した。上述の結果を得るためには, 上の記号で s の W における中心化群を考える (上述の $W^{\perp s}$ はその一部である) が, それがここでいう $W_1 \rtimes G$ の形をしていることがポイントである。単なる群としての任意の自己同型が鏡映全体の集合を保つような Coxeter 群 W のクラスについてはいくつか先行する結果があるが, 無限生成の場合を

含めて包括的な議論を行い, 広いクラスに対してこのような結論を得ている結果ははじめてである.

以上のように, 提出論文は Coxeter 群の同型問題を有限生成に限定しない範囲に広げ, その進展に寄与する著しい結果を与えるものである.

よって論文提出者縫田光司は, 博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める.