論文の内容の要旨

論文題目　Chart descriptions of monodromy representations on oriented closed surfaces
（向き付けられた閉曲面上のモノドロミー表現のチャート表示）

氏名　長谷川　功

4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ に埋め込まれた閉曲面を曲面絡み目と呼ぶ。曲面絡み目の全同位同値による分類が 2 次元結び目理論の主目的である。1 次元結び目理論において $\mathbb{R}^3$ のなかの絡み目と Artin のブレイドとの関係が示されているが、2 次元結び目理論においても同様な研究がなされている。Viro により導入された 2 次元ブレイドの概念が鎌田氏による一連の研究より理論的に整備され発展した。

鎌田氏は一連の研究の中で、2 次元ブレイドを記述するためにチャート表示と呼ばれる方法を導入し [K92] において次数が 3 の 2 次元ブレイドはある標準形に変形できることを示した。この結果は [KMMW] において種数 1 のレフシェッツファイバー空間の分類定理に応用された。これはすでに知られていた分類定理に対して簡明な別証を与えている。

筆者はまず鎌田氏のチャート表示の定義を一般化して Auroux の定理（[A]）の別証を得た。また 2 次元結び目理論における二重絡み数とある準同型 $B_m \to G$ との関係をチャート表示を応用して研究した。現時点ではまだ応用された例は少ないがレフシェッツファイバー空間や 2 次元ブレイドの他にも複素射影平面上の有限被覆の分岐集合とモノドロミー表現との関連が示されているなど、特に 4 次元多様体のトポロジーに関してチャート表示が有用な道具になると期待される。以下論文の内容について述べる。

## Part 1：向き付けられた閉曲面上のモノドロミー表現のチャート表示

鎌田氏はまず 2 次元ブレイドがそのモノドロミー表現 $\rho : \pi_1(D^2 \setminus \Sigma, b_0) \to B_m$ で決定されるこ

とを示した ([K94])。ここで $\Sigma$ は 2 次元円板 $D^2$ の内部の有限個の点からなる部分集合である。一方、$D^2$ の内部に埋め込まれたグラフによって 2 次元ブレイドを記述するチャート表示と呼ばれる方法を導入した ([K96])。2 次元ブレイドのモノドロミー表現は条件 $\rho(\partial D^2) = \mathrm{id}$ を満たすので、$\rho$ は穴あき球面 $S^2 \setminus \Sigma$ の基本群から $B_m$ へ準同型とみなせることに注意する。2 次元ブレイド理論におけるモノドロミー準同型とチャート表示との対応を以下のように一般化した。

まず群 $G$ をひとつ固定する。$B$ を向き付けられた閉曲面として $\Sigma$ を $B$ の有限個の点からなる部分集合とする。群 $G$ に値をとるモノドロミー $\rho$ とは準同型 $\rho : \pi_1(B \setminus \Sigma, b_0) \to G$ の事であると定義する。また、2 つのモノドロミー $\rho$ と $\rho'$ が同値であるとは、向きを保つ同相写像

$$h : (B, \Sigma, b_0) \to (B', \Sigma', b_0)$$

と $G$ の内部自己同型写像 $g$ が存在して $\rho' \circ h_* = g \circ \rho$ が満たされる事である。各点 $s \in \Sigma$ のまわりで $\rho$ によって $G$ の元が共役を除いて定まる。これを $\rho$ の $s$ における局所モノドロミー型と呼ぶ。

ここでチャート表示はピクチャー理論（cf. [I], [R]）の拡張であるとみなせる事に注意しておく。以下の用語については [BP] によるピクチャーの定義を参考にしている。

チャート表示を定義するためには $G$ の表示 $P = \langle X | R \rangle$ と $W(X)$ の部分集合 $L$ を固定する。ここで $X$ は生成元の集合で $R$ は関係子の集合であり、$W(X)$ は $X \cup X^{-1}$ で生成される自由半群である。$\Gamma$ を $B$ の互いに交わらない有限個の 2 次元円板 $\{V_i\}$ と互いに交わらない有限個の向き付けられた連結な 1 次元部分多様体 $\{E_j\}$ からなるもので次を満たすものとする: それぞれの $E_j$ は $B \setminus \bigcup_i \mathrm{Int} V_i$ に正則に埋め込まれ、生成元 $x$ をラベルとしてもつ。さらに、それぞれの $V_i$ は $r$, $-r$ または $\ell$ をラベルとしてもち（ただし $r \in R$, $\ell \in L$）、$\partial V_i \setminus \bigcup_j E_j$ に基点 $b_{V_i}$ をもつ。

$\Gamma$ が $(P, L)$-チャートであるとは、それぞれの $V_i$ のまわりで $E_j$ のラベルに符号を付加したものを $\partial V_i$ に沿って並べて得られる $W(X)$ の元が $V_i$ のラベル（$r$, $-r$ または $\ell$）に応じて $r$, $r^{-1}$ または $\ell$ に等しくなることであると定義する。チャート $\Gamma$ から自然にモノドロミー $\rho_\Gamma$ が得られる事に注意する。このとき鎌田氏の理論の一般化として次が得られた。

定理（[K92] Theorem 14 の一般化）$G$ に値をとるモノドロミー $\rho$ の局所モノドロミー型が $L$ の元で表されると仮定する。このときある $(P, L)$-チャート $\Gamma$ が存在して $\rho_\Gamma$ と $\rho$ が同値になる。

またチャート変形同値の定義を一般化することで次が得られた。

定理（[K96] Theorem 1.1 の一般化）2 つの $(P, L)$-チャート $\Gamma$ と $\Gamma'$ がチャート変形同値である事と $\rho_\Gamma$ と $\rho_{\Gamma'}$ が同値である事は必要十分である。

応用として種数 $g (g \geq 3)$ のレフシェッツファイバー空間を考える。種数が 2 以上のレフシェッツファイバー空間はモノドロミー準同型によって決定されることが Kas と松本幸夫氏によって独立に示されている（[Kas], [M]）。この結果からチャート表示を用いてレフシェッツファイバー空間を研究する事も可能であり、次の定理の別証を $g \geq 3$ に対して与える事ができた。

定理（[A] Theorem 2）任意の $g$ に対してある種数 $g$ のレフシェッツファイバー空間 $f_g^0$ が存在して以下の性質を満たす：種数 $g$ のレフシェッツファイバー空間とその切断の対 $(f, s)$ と $(f', s')$ を考える。ここで $f$, $f'$ の全空間は $M$, $M'$ であるとする。さらに次を仮定する：

1. 全空間 $M$ と $M'$ のオイラー特性数と符号数はそれぞれ等しい、

2. 切断 $s$ と $s'$ は等しい自己交差数を持つ、

3. $f$ と $f'$ の可約な特異ファイバーの個数はファイバーの型ごとに等しい。

このとき、十分大きなすべての $n$ についてファイバー和 $f \sharp n f_g^0$ と $f' \sharp n f_g^0$ は同型である。

## Part 2：ブレイド群のある線形表現とチャート表示

2 次元ブレイド $S$ のモノドロミー表現 $\rho_S$ はブレイド群 $B_m$ に値をとるが、次の線形表現 $\varphi$ を考える：

$$\varphi(\sigma_i) = \begin{pmatrix} I & & & \\ & 0 & -1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & I \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z}).$$

この線形表現による像 $\varphi(B_m)$ はある有限群 $G$ に含まれる。そこで $G$ に値をとるモノドロミーを適当な局所モノドロミー型の条件の下で分類する問題が考えられる。筆者はチャート表示の state sum invariant（状態和）を用いて分類を完成し、さらに鎌田氏によって導入された彩色つきの状態和を用いて曲面絡み目の二重絡み数と $\varphi \circ \rho_S$ との関係を示す事ができた。

定理 2 次元ブレイド $S$ の閉包 $\widehat{S}$ が 2 成分からなる曲面絡み目であってそれぞれの成分の $S$ におけるブレイド次数が 3 以上であるとする。このとき $\widehat{S}$ の二重絡み数が 0 であることと $\varphi \circ \rho_S$ が free edge だけからなる $(P(G), L)$-チャートで表されることとが同値である。

一方、曲面絡み目の重要な族としてリボン型の曲面絡み目があるが、鎌田氏によって、リボン型曲面絡み目はリボン型チャートと呼ばれる 6 価頂点を持たないチャートによって表され，逆にリボン型チャートによって表される曲面絡み目はリボン型であることが示されている。この事実に関連して次の定理を示せた。

定理 リボン型チャートによって表すことのできない 2 次元ブレイドで，リボン型の曲面絡み目を表す 2 次元ブレイドが無限個存在する。

上記の定理の証明において具体的に 2 次元ブレイドの例を構成して曲面絡み目としての変形をするが、ここでもチャート表示が有用である。

Part 2 の結果は題目"A certain linear representation of the classical braid group and its applications to surface braids"で Math. Proc. Camb. Phil. Soc. に掲載予定である。

## Part 3：ツイストスパン曲面絡み目のチャート表示

任意の向き付け可能な曲面絡み目は 2 次元ブレイドによって表されることが鎌田氏によって示されているが，著者は一次元絡み目の組み紐表示を与えたときにその絡み目から [Z] で定義されたツイストスピニングの構成によって得られる曲面絡み目のチャート表示を構成する方法を得た。

この結果の応用として，ツイストスパン曲面結び目の 1 ハンドルによる結び目解消数は元の結び目の組み紐次数よりも 1 以上小さいことを示すことができ，さらに結び目解消変形を具体的に表示することも可能である．また別の応用として，今回得られたチャート表示を変形することによって，任意の一次元結び目から 1-ツイストスピニングによって得られる球面結び目は自明な球面結び目に同型であるという [Z] において示された事実の組み合わせ的な別証明を与えることができた．

## 参考論文

題目 The lower bound of the $w$-indices of non-ribbon surface-links.

(Osaka J. Math. **41** (2004) 掲載)

向き付けられた曲面絡み目に対して $w$-index と呼ばれる不変量がチャートを用いて定義される。筆者は非リボン型の球面絡み目に対して $w$-index の値の最小値を求め、具体的な例に対して $w$-index

の値を決定した。

## 謝辞

本論文の作成に際して、研究をご指導してくださいました松本幸夫先生の励ましやご助言に心より感謝いたします。

## 参考文献

[A] D. Auroux, *A stable classification of Lefschetz fibrations.* Geom. Topol. **9** (2005), 203–217 (electronic).

[BP] W. A. Bogley; S. J. Pride, *Calculating generators of* $\Pi_2$. Two-dimensional homotopy and combinatorial group theory, 157–188, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 197, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[I] K. Igusa, *The generalized Grassmann invariant.* preprint.

[K92] S. Kamada, *Surfaces in* $\mathbf{R}^4$ *of braid index three are ribbon.* J. Knot Theory Ramifications **1** (1992), no. 2, 137-160.

[K94] S. Kamada, *On braid monodromies of non-simple braided surfaces.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **120** (1996), no. 2, 237–245.

[K96] S. Kamada, *An observation of surface braids via chart description.* J. Knot Theory Ramifications **5** (1996), no. 4, 517-529.

[KMMW] S. Kamada; Y. Matsumoto; T. Matumoto; K. Waki, *Chart description and a new proof of the classification theorem of genus one Lefschetz fibrations.* J. Math. Soc. Japan **57** (2005), no. 2, 537–555.

[Kas] A. Kas, *On the handlebody decomposition associated to a Lefschetz fibration.* Pacific J. Math. **89** (1980), no. 1, 89–104.

[M] Y. Matsumoto, *Lefschetz fibrations of genus two—a topological approach.* Topology and Teichmüller spaces (Katinkulta, 1995), 123–148, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1996.

[R] C. P. Rourke, *Presentations and the trivial group.* Topology of low-dimensional manifolds (Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate, 1977), pp. 134–143, Lecture Notes in Math., 722, Springer, Berlin, 1979. Rourke

[Z] E. C. Zeeman, *Twisting spun knots.* Trans. Amer. Math. Soc. **115** (1965) 471–495.