論文の内容の要旨

論文題目

On Differential Operators of Rankin-Cohen-Ibukiyama Type for Automorphic Forms of Many Variables

（多変数保型形式に対するランキン・コーエン・伊吹山型微分作用素について）

氏名　伴克馬

ランキン・コーエン・伊吹山型微分作用素とは，いくつかの保型形式に対して，それらの微分を通して新しい保型形式を与えるものである．楕円モジュラー形式の場合にはランキン，コーエンによる古典的な結果が知られていたが，伊吹山によりジーゲル・モジュラー形式の場合にも微分作用素がどのように記述されるかについて一般論が与えられた [6]．本論文は，この伊吹山の結果を表現論的な観点から捉え直すことでランキン・コーエン・伊吹山型微分作用素をハウ双対性の応用として扱い，その結果ジーゲル・モジュラー形式と平行して $\widetilde{U}(p,q)$ と $\widetilde{O}^*(2p)$ の上の正則保型形式に対する微分作用素の記述も得ることに成功した．

以下，主結果について説明する．簡単のためここではジーゲル・モジュラー形式の場合にのみ述べる．$Mp(n,\mathbf{R})$ を行列サイズ $2n$ のメタプレクティック群とし，その極大コンパクト群 K_n をとる．さらに $f_1,\dots,f_d$ をウェイト $\frac{k_s}{2}$ の保型形式とし，$\phi_{f_1},\dots,\phi_{f_d}$ をその $Mp(n,\mathbf{R})$ 上の関数へのリフトとする．$L(\frac{k_s}{2}\mathbf{1}_n)$ を最低 K_n 型が $\frac{k_s}{2}\mathbf{1}_n$ の $Mp(n,\mathbf{R})$ のユニタリ最低ウェイト表現とするとき，保型形式 f_s は保型実現 $L(\frac{k_2}{2})_{K_n} \to C^\infty(\Gamma\backslash Mp(n,\mathbf{R}))$ に対応する．$L(\frac{k_s}{2})$ たちのテンソル積の部分表現として現れる既約表現はユニタリ最低ウェイト表現に限られるが，これらの一つに最低 K_n 型が τ のユニタリ最低ウェイト表現 $L(\tau)$ が現れるとする．すると，合成

$$L(\tau)_{K_n} \to \bigotimes_{s=1}^{d} L(\tfrac{k_s}{2}\mathbf{1}_n)_{K_n} \to \bigotimes_{s=1}^{d} C^\infty(\Gamma\backslash Mp(n,\mathbf{R})) \xrightarrow{\Delta^*} C^\infty(\Gamma\backslash Mp(n,\mathbf{R}))$$

として新たら保型実現が得られる．ここで，最後の準同形は対角埋め込み Δ が誘導するものである．この保型実現はウェイト τ の保型形式に対応する．これが元々の保型形式から新しい保型形式を作り出す仕組みである．

一つ目の問題は，テンソル積 $\bigotimes_{s=1}^{d} L(\frac{k_s}{2}\mathbf{1}_n)$ にはどのような既約部分表現が現れるかと決定することである．これは，どのようなウェイトの保型形式が得られるか，ということに対応する．二つ目の問題は，上のようにして得らる保型形式を記述することであり，これがランキン・コーエン・伊吹山型微分作用素の記述に他ならない．前者への解答は次の定理である．以下 $k = k_1 + \cdots + k_d$ とおく．

定理 1. テンソル積の既約分解は

$$\bigotimes_{s=1}^{d} L(\tfrac{k_s}{2}\mathbf{1}_n) \simeq \bigoplus_{D\in\Delta_k} L(\tau(D) + \tfrac{k_s}{2}) \otimes V_\lambda^{O(k_1)\times\cdots\otimes O(k_d)}$$

で与えられる．ここで，Δ_k はあるヤング図形の集合で，$\tau(D)$ は D でパラメトライズされる $U(n)$ の支配的整ウェイトであり，$V_{\lambda(D)}$ は D でパラメトライズされる $O(k)$ の有限次元既約表現である．

さて，$\tau=\tau(D)+\frac{k_s}{2}$ となる τ に対して，保型実現 $L(\tau)_{K_n}\to C^\infty(\Gamma\backslash Mp(n,\mathbf{R}))$ を考える．まず，$\mathscr{H}_k$ を $O(k)$-調和多項式，すなわち $f(x)\in\mathbf{C}[M_{n,k}]$ であって $1\leqslant i,\,j\leqslant n$ に対して $\sum_{\xi=1}^k \dfrac{\partial^2}{\partial x_{i,\xi}\partial x_{j,\xi}}f(x)=0$ となるもの全体のなす空間とする．$\mathscr{H}_k$ への $K_n\times O(k)$ の作用を $((\tilde g,c)f)(x)=\det(g)^{\frac{k}{2}}f({}^tgxc)$，$(\tilde g,c)\in\widetilde{U}(k)\times O(k)\simeq K_n\times O(k)$ として定める．この作用のもとで，$O(k)$-調和多項式の空間は $\mathscr{H}_k\simeq\bigoplus_{D\in\Delta_k}\mathscr{H}_k(D)$ と分解する．各因子 $\mathscr{H}_k(D)$ は既約で $U_{\tau(D)+\frac{k}{2}}\boxtimes V_{\lambda(D)}$ と同型な既約表現である．部分加群 $L(\tau(D)+\frac{k}{2}\mathbf{1}_n)_{K_n}\hookrightarrow\bigotimes L(\frac{k_s}{2}\mathbf{1}_n)_{K_n}$ を与えることと $\underline{h}\in(\mathscr{H}_k(D)^{O(k_1)\times\cdots\otimes O(k_d)}\otimes U^*_{\tau(D)+\frac{k}{2}\mathbf{1}_n})^{K_n}$ を与えることは同値になる．したがって，$\underline{h}$ に対応するジーゲル・モジュラー形式を計算することにする．

$\underline{h}\in(\mathscr{H}_k(D)^{O(k_1)\times\cdots\otimes O(k_d)}\otimes U^*_{\tau(D)+\frac{k}{2}\mathbf{1}_n})^{K_n}$ は $O(k_1)\times\cdots\times O(k_d)$ による不変性から (n,n) 対称行列変数 $z^{(s)}=x^{(s)t}x^{(s)}$ の多項式，ただし $x^{(s)}$ は (n,k_s)-行列変数 $(x_{i,k_1+\cdots+k_{s-1}+j})_{i,j}$，と現せる．これを $\Phi_{\underline{h}}(z^{(1)},\ldots,z^{(d)})$ と書く．さらに $\pi^+_{i,j}=\begin{pmatrix} e_{i,j}+e_{j,i} & \sqrt{-1}(e_{i,j}+e_{j,i})\\ \sqrt{-1}(e_{i,j}+e_{j,i}) & -(e_{i,j}+e_{j,i})\end{pmatrix}$ とおく．ジーゲル上半空間上の関数 f_s のかわりに，$Mp(n,\mathbf{R})$ 上へのリフト ϕ_{f_s} に関して定理を述べる．

定理 2. $s=1,\ldots,d$ に対して，ϕ_{f_s} を Γ に関するウェイト $\frac{k_s}{2}\mathbf{1}_n$ のスカラー値保型形式とする．各 $\underline{h}\in(\mathscr{H}_k(D)^{O(k_1)\times\cdots\otimes O(k_d)}\otimes U^*_{\tau(D)+\frac{k}{2}\mathbf{1}_n})^{K_n}$ に対して

$$\Delta^*(\Phi_{\underline{h}}(\pi^+,\ldots,\pi^+)(\phi_{f_1}\otimes\cdots\otimes\phi_{f_d}))$$

は Γ に関するウェイト $\tau(D)+\frac{k}{2}$ の保型形式である．ここで $\pi^+=(\pi^+_{i,j})$ である．

ここで Δ^* は Δ が誘導する準同型 $(\bigotimes_{s=1}^d C^\infty(\Gamma\backslash Mp(n,\mathbf{R})))\otimes U^*_{\tau(D)+\frac{k}{2}}\to C^\infty(\Gamma\backslash Mp(n,\mathbf{R}))\otimes U^*_{\tau(D)+\frac{k}{2}}$ である．

これらの定理の背後にある理論はハウ双対性の特殊な場合である柏原・ヴェルニュの結果である．実際，定理 1 は $Mp(n,\mathbf{R})$ のヴェイユ表現を $Mp(n,\mathbf{R})\times O(k)$ による分解から得られる．定理 2 はもう少し微妙な問題ではあるが，やはり同じ表現のフォック模型の構造を調べることで導かれる．ここでジーゲル・モジュラー形式に対して行った議論は他の簡約双対ペア $(\widetilde{U}(p,q),U(k))$ と $(\widetilde{O}^*(2p),Sp(k))$ に対しても平行して成り立つ．本論文ではこれらの場合にも定理 1,2 に対応する定理を証明する．

さて，元々の伊吹山の定理はリフトでなく f_s たちについて述べられていたが，これは定理 2 から導くことができる．K_n の表現 (τ,U_τ) に対して，(τ',U'_τ) を $U'_\tau=U_\tau$ への表現 $k\mapsto\tau({}^tk^{-1})$ とする．τ' は τ^* と同型であるので，これを同一視する．さらに，$\mathfrak{H}_n$ の変数を z で書くことにして，$\dfrac{\partial}{\partial z}$ で行列 $\left(\dfrac{1+\delta_{i,j}}{2}\dfrac{\partial}{\partial z_{i,j}}\right)$ を表すことにする．

定理 3. $s=1,\ldots,d$ に対して，f_s を Γ に関するウェイト $\frac{k_s}{2}\mathbf{1}_n$ のスカラー値保型形式とする．各 $\underline{h}\in(\mathscr{H}_k(D)^{O(k_1)\times\cdots\otimes O(k_d)}\otimes U'_{\tau(D)+\frac{k}{2}\mathbf{1}_n})^{K_n}$ に対して

$$\Delta^*\left(\Phi_{\underline{h}}\left(\frac{\partial}{\partial z},\ldots,\frac{\partial}{\partial z}\right)(\phi_1\otimes\cdots\otimes\phi_d)\right)$$

は Γ に関するウェイト $\tau(D)+\frac{k}{2}$ の保型形式である．

これは伊吹山によるランキン・コーエン・伊吹山型微分作用素の記述（論文 [6] の Corollary 2 (2)）に他ならない．

参考文献

[1] Y. Choie and W. Eholzer, Rankin-Cohen operators for Jacobi and Siegel forms, *J. Number Theory*, **68** (1998), 160–177.

[2] W. Eholzer and T. Ibukiyama, Examples of invariant pluri-harmonic polynomials and Rankin-Cohen type differential operators, *International J. Math.*, **9** (1998), 443–463.

[3] H. Cohen, Sum involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters, *Math. Ann.*, **217** (1975), 271–285.

[4] R. Howe, Remarks on classical invariant theory, *Trans. A.M.S.*, **313** (1989), 539–570.

[5] R. Howe, Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity-free actions and beyond, in *The Schur Lectures (1992)*, Israel Math. Conf. Proc. **8**, Bar-Ilan Univ., 1995, 1–182.

[6] T. Ibukiyama, On differential operators on automorphic forms and invariant pluri-harmonic polynomials, *Comm. Math. Univ. Sancti Pauli*, **48** (1999), 103–118.

[7] T. Ibukiyama, Vector valued Siegel modular forms of half integral weight, *Preprint*.

[8] M. Kashiwara and M. Vergne, On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials, *Invent. Math.*, **44** (1978), 1–47.