論文審査の結果の要旨

氏名　伴克馬

論文題目

On Differential Operators of Rankin-Cohen-Ibukiyama Type
for Automorphic Forms of Many Variables
(多変数保型形式に対するランキン・コーエン・伊吹山型微分作用素について)

二つの正則楕円モジュラー形式 $f(z)$, $g(z)$ で重さがそれぞれ k, l のものが与えられたとき、明らかに積 $f(z)g(z)$ も重さ $k+l$ の正則楕円モジュラー関数になる。半世紀以前に Rankin は、f と g の適切な回数の微分 $\frac{\partial^a f}{\partial z^a}$, $\frac{\partial^b g}{\partial z^b}$ の双線型形式で重さが $k+l+m$ (m がある正整数) となるものを無限個構成する手法を見つけた。この種のものは、その後 Cohen その他の人々によって一般化と応用がなされ、Rankin-Cohen 作用素と呼ばれている。

ここ 10 年ほどの間に、大阪大学の伊吹山知義は、これの類似物を Siegel モジュラー形式に対して構成することに成功した。ある定まった種数 g の有限個数 n 個の Siegel モジュラー形式に対し、それに多変数の調和多項式型の偏微分作用素を適用して、同じ種数のより重さの高い Siegel モジュラー形式を構成する手法である。この伊吹山の構成法 (以下 Ibukiyama の作用素と称する) を詳しく見ると、これは不連続群のありかたに殆ど依存していないこと、実は不連続群が入る実 Lie 群である n 次シンプレクッティック群 $Sp(n,\mathbf{R})$ (とその表現) の構造にのみに依存していることが読み取れる。

本論文は、Ibukiyama 作用素の構成に見え隠れする、この実の表現論的な枠組みを明示的に取り出して、これが $Sp(n,\mathbf{R})$ の Weil 表現に対する Kashiwara-Vergne の結果より導出される定理によって完全に説明されることを明白にし、さらに他の半単純 Lie 群 $SU(p,q)$, $SO^*(2n)$ に対しても一般化して、所謂 Howe 双対性の枠組みで捉えらるものを包括的に取り扱った。

以下，数式を交えて主結果ついて説明する．簡単のためここでは 3 種の場合のうちの最初の場合である Siegel モジュラー形式の場合について述べよう．$Mp(n,\mathbf{R})$ を行列サイズ $2n$ のシンプレクティック群 $Sp(n,\mathbf{R})$ の自明でない 2 重被覆、つまりメタプレクティック群とし，その極大コンパクト群 $\widetilde{K}_n$ をとる．さらに $f_1,\ldots,f_d$ を重さ $\frac{k_s}{2}$ の保型形式とし，$\phi_{f_1},\ldots,\phi_{f_d}$ をそれらに対応する Lie 群 $Mp(n,\mathbf{R})$ 上の関数への持ち上げとする．$L(\frac{k_s}{2}\mathbf{1}_n)$ を lowest $\widetilde{K}_n$-type が $\frac{k_s}{2}\mathbf{1}_n$ の $Mp(n,\mathbf{R})$ のユニタリ lowest weight 表現とするとき，保型形式 f_s は保型的な実現 $L(\frac{k_s}{2}\mathbf{1}_n)_{\widetilde{K}_n} \to C^\infty(\Gamma\backslash Mp(n,\mathbf{R}))$ に対応する．$L(\frac{k_s}{2}\mathbf{1}_n)$ たちのテンソル積の部分表現として現れる既約表現はユニタリ lowest weight 表現に限られるが，これらの一つに lowest $\widetilde{K}_n$-type 型が τ のユニタリ lowest weight 表現 $L(\tau)$ が現れるとする．すると，合成

$$L(\tau)_{\widetilde{K}_n} \to \bigotimes_{s=1}^{d} L(\tfrac{k_s}{2}\mathbf{1}_n)_{\widetilde{K}_n} \to \bigotimes_{s=1}^{d} C^\infty(\Gamma\backslash Mp(n,\mathbf{R})) \xrightarrow{\Delta^*} C^\infty(\Gamma\backslash Mp(n,\mathbf{R}))$$

として新たな保型的な実現が得られる．ここで，最後の準同型は対角埋め込み Δ から誘導される．この合成で得られる保型的な実現は，「重さ」τ の保型形式に対応する．これが元々の保型形式から新しい保型形式を作り出す仕組みに他ならない．

ここで問題は二つある．(1): テンソル積 $\bigotimes_{s=1}^{d} L(\frac{k_s}{2}\mathbf{1}_n)$ 内に生じる既約部分表現を決定することである．(2): その既約因子に対応する保型形式を記述する．後の問題が Rankin-Cohen-Ibukiyama 型微分作用素の記述に他ならない．初めの問題への答は次の定理である．以下 $k = k_1 + \cdots + k_d$ とおく．

主定理 1. テンソル積の既約分解は

$$\bigotimes_{s=1}^{d} L(\tfrac{k_s}{2}\mathbf{1}_n) \simeq \bigoplus_{D\in\Delta_k} L(\tau(D) + \tfrac{k_s}{2}\mathbf{1}_n) \otimes V_{\lambda}^{O(k_1)\times\cdots\times O(k_d)}$$

で与えられる．ここで，Δ_k はあるヤング図形の集合で，$\tau(D)$ は D でパラメトライズされる $U(n)$ の *dominant integral weight* であり，$V_{\lambda(D)}$ は D でパラメトライズされる $O(k)$ の有限次元既約表現である．

さて，$\tau = \tau(D) + \frac{k_s}{2}\mathbf{1}_n$ となる τ に対して，保型実現 $L(\tau)_{\widetilde{K}_n} \to C^{\infty}(\Gamma\backslash Mp(n,\mathbf{R}))$ を考える．まず，$\mathcal{H}_k$ を $O(k)$-調和多項式，すなわち $f(x) \in \mathbf{C}[M_{n,k}]$ であって $1 \leqslant i, j \leqslant n$ に対して $\sum_{\xi=1}^{k} \dfrac{\partial^2}{\partial x_{i,\xi}\partial x_{j,\xi}} f(x) = 0$ となるもの全体のなす空間とする．$\mathcal{H}_k$ への $\widetilde{K}_n \times O(k)$ の作用を $((\tilde{g},c)f)(x) = \det(g)^{\frac{k}{2}} f({}^t gxc)$，$(\tilde{g},c) \in \widetilde{U}(k)\times O(k) \simeq \widetilde{K}_n \times O(k)$ として定める．このとき $O(k)$-調和多項式の空間は $\mathcal{H}_k \simeq \bigoplus_{D\in\Delta_k} \mathcal{H}_k(D)$ と分解する．各因子 $\mathcal{H}_k(D)$ は既約で $U_{\tau(D)+\frac{k}{2}\mathbf{1}_n} \boxtimes V_{\lambda(D)}$ と同型な既約表現である．埋め込み $L(\tau(D)+\frac{k}{2}\mathbf{1}_n)_{\widetilde{K}_n} \hookrightarrow \bigotimes L(\frac{k_s}{2}\mathbf{1}_n)_{\widetilde{K}_n}$ を与えることと 0 でない $\underline{h} \in (\mathcal{H}_k(D)^{O(k_1)\times\cdots\times O(k_d)} \otimes U^*_{\tau(D)+\frac{k}{2}\mathbf{1}_n})^{\widetilde{K}_n}$ を与えることは同値である．それ故，$\underline{h}$ に対応する Siegel モジュラー形式を計算することにする．

$\underline{h} \in (\mathcal{H}_k(D)^{O(k_1)\times\cdots\times O(k_d)} \otimes U^*_{\tau(D)+\frac{k}{2}\mathbf{1}_n})^{\widetilde{K}_n}$ は $O(k_1) \times \cdots \times O(k_d)$ の下での不変性から (n,n) 対称行列変数 $z^{(s)} = x^{(s)t}x^{(s)}$ の多項式となる．ただし $x^{(s)}$ は (n,k_s)-行列変数 $(x_{i,k_1+\cdots+k_{s-1}+j})_{i,j}$，と現せる．これを $\Phi_{\underline{h}}(z^{(1)},\ldots,z^{(d)})$ と書く．さらに $\pi^+_{i,j} = \begin{pmatrix} e_{i,j}+e_{j,i} & \sqrt{-1}(e_{i,j}+e_{j,i}) \\ \sqrt{-1}(e_{i,j}+e_{j,i}) & -(e_{i,j}+e_{j,i}) \end{pmatrix}$ とおく．保型形式 f_s の $Mp(n,\mathbf{R})$ 上への持ち上げ ϕ_{f_s} に関して定理を述べる．

主定理 2. $s = 1,\ldots,d$ に対して，ϕ_{f_s} を Γ に関する重さ $\frac{k_s}{2}\mathbf{1}_n$ のスカラー値保型形式とする．各 $\underline{h} \in (\mathcal{H}_k(D)^{O(k_1)\times\cdots\times O(k_d)} \otimes U^*_{\tau(D)+\frac{k}{2}\mathbf{1}_n})^{\widetilde{K}_n}$ に対して

$$\Delta^*(\Phi_{\underline{h}}(\pi^+,\ldots,\pi^+)(\phi_{f_1}\otimes\cdots\otimes\phi_{f_d}))$$

は Γ に関する重さ $\tau(D) + \frac{k}{2}$ の保型形式である．ここで $\pi^+ = (\pi^+_{i,j})$ である．

主定理 2 は Weil 表現の Fock 模型の構造を調べることで証明される．当論文では、Siegel モジュラー形式に対して行った議論は、他の dual reductive pairs $(\widetilde{U}(p,q),U(k))$ と $(O^*(2p),Sp(k))$ に対しても平行して拡張され、これらの場合にも定理 1,2 に対応する定理を証明している．

本論文は、古典系列の有界対称領域のスカラー値の正則保型形式の構成法に、極めて一般性のある手法のあることを明らかにした．しかもこれまでの古典的な文脈に含まれた表現論的な仕掛けを極めて自然で透明な形で明らかに当該分野の研究に大きく寄与できる．よって、論文提出者 伴 克馬 は、博士（数理科学）の学位をうけるにふさわしい充分な資格があると認める．