論文の内容の要旨

論文題目：On Kronecker limit formulas for real quadratic fields
（実２次体におけるクロネッカー極限公式について）

氏　　名：　　　　山本　修司

K を実 2 次体とし，イデアル $\mathfrak{f} \subset O_K$ を法とする狭義合同イデアル類群を $Cl_K(\mathfrak{f})$ で表す．K におけるクロネッカー極限公式とは，$Cl_K(\mathfrak{f})$ の指標 χ に対して L 関数 $L(s,\chi)$ の $s=1$ における値 $L(1,\chi)$（$\chi=1$ のときはローラン展開の定数項）を表す公式のことを指す．これは各合同類 $\mathfrak{C} \in Cl_K(\mathfrak{f})$ に対して部分 ζ 関数 $\zeta(s,\mathfrak{C})$ の $s=1$ におけるローラン展開の定数項を求めることと同等である．古典的には K が有理数体（ディリクレ - クンマー）または虚 2 次体（クロネッカー）の場合の公式が知られており，これらが円単数，楕円単数と関係することから，K が実 2 次体（またはより一般の代数体）の場合にも，クロネッカー極限公式と類体の構成問題との関係が期待されている（スターク - 新谷予想）．

本論文ではまず，合同類 $\mathfrak{C} \in Cl_K(\mathfrak{f})$ に対して $\{(\omega_k, x_k, y_k) \mid k=1,\ldots,rm\}$ という有限個のデータを対応させた．ここで r, m は自然数，ω_k は K の元，x_k, y_k はそれぞれ $0 < x_k \le 1, 0 \le y_k < 1$ を満たす有理数である．また ω_k は次のような純循環連分数展開を持つ：

$$\omega_k = b_k - \cfrac{1}{b_{k+1} - \cfrac{1}{b_{k+2} - \cdots}} \qquad (b_i \text{は整数},\ b_i \ge 2,\ b_{i+m} = b_i).$$

これらを用いて次のような極限公式が与えられる：

定理 1 (Theorem 2.2.1) 埋め込み $K \hookrightarrow \mathbb{R}$ を固定し，K における $\mathbb{Q}$ 上の共役写像を $x \mapsto x'$ で表す．また K の判別式を D とおき，$\equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ なる総正単数群の生成元で 1 より大きなものを

$\varepsilon_{\mathfrak{f}}$ と書く．このとき

$$\lim_{s\to 1}\left(\left(D^{1/2}N(\mathfrak{f})\right)^s\zeta(s,\mathfrak{C})-\frac{\log\varepsilon_{\mathfrak{f}}}{s-1}\right)=\sum_{k=1}^{rm}P(\omega_k,\omega'_k,x_k,y_k).$$

ここで P は

$$\begin{aligned}P(\omega,\omega',x,y)=&F(\omega,x,y)-F(\omega',x,y)+\mathrm{Li}_2(\omega'/\omega)-\frac{\pi^2}{6}\\&+\log(\omega/\omega')\left(-\psi(x)-\frac{\log(\omega-\omega')}{2}+\frac{\log(\omega/\omega')}{4}\right).\end{aligned}$$

なる関数，ただし Li_2 は 2 重対数関数，ψ はガンマ関数の対数微分であり，

$$F(\omega,x,y)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-yt}}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)f(\omega t,x)dt,\quad f(\omega,x)=-\int_\omega^\infty\frac{e^{-xu}}{1-e^{-u}}du$$

である．

この公式は $\mathfrak{f}=O_K$ の場合における Zagier [3] の結果の拡張となっている．Zagier の公式にも ω_k は現れるが，(x_k,y_k) は自動的に全て $(1,0)$ となるため明示的には現れていない．

次に $\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{C}_2\in Cl_K(\mathfrak{f})$ を

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_1&=[(\mu_1)],\quad \mu_1\in 1+\mathfrak{f},\ \mu_1<0,\ \mu'_1>0,\\ \mathfrak{C}_2&=[(\mu_2)],\quad \mu_2\in 1+\mathfrak{f},\ \mu_2>0,\ \mu'_2<0\end{aligned}$$

で定義される合同類とすると，指標 χ は 4 種類の符号 $\left(\chi(\mathfrak{C}_1),\chi(\mathfrak{C}_2)\right)=(\pm1,\pm1)$ によって分類される．この符号における $+1$ の個数を b_χ とおくと，χ が原始指標のときには，関数等式によって

$$L(1,\chi)=C_\chi L^{(b_\chi)}(0,\chi^{-1}),\qquad C_\chi=\frac{2^{b_\chi}\pi^{2-b_\chi}W(\chi)}{\sqrt{DN(\mathfrak{f})}\,b_\chi!}$$

なる等式が成り立つことが分かる．よってクロネッカー極限公式の研究は $\zeta(0,\mathfrak{C})$, $\zeta'(0,\mathfrak{C})$ および $\zeta''(0,\mathfrak{C})$ なる値の研究に帰着する．本論文では前の二つについて考察した．

$\zeta(0,\mathfrak{C})$ については，第 4 節において次の公式を示した：

定理 2 (Theorem 4.1.1) $B_i(X)$ をベルヌーイ多項式とするとき，

$$\zeta(0,\mathfrak{C})=\sum_{k=1}^{rm}\left\{B_1(x_k)B_1(y_k)+\frac{b_k}{2}B_2(x_k)\right\}.$$

これは $\mathfrak{f}=O_K$ の場合には Meyer-Zagier の公式と一致する（[4] を参照）．なおこの表示の応用として，$\zeta(0,\mathfrak{C})=\zeta(0,\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2)$ なる等式（Proposition 4.2.1）が直接の計算によって証明される．

一方第 5 節では，$\zeta'(0,\mathfrak{C})$ に関連して

$$X(\mathfrak{C})=\exp\left(-\zeta'(0,\mathfrak{C})+\zeta'(0,\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2)\right)$$

なる量について考察した．これは新谷卓郎 [1, 2] によって導入された不変量（の逆数）である．2 重正弦関数 $\mathcal{S}(\omega,z)$ を用いると，$X(\mathfrak{C})$ は次のように表示される：

定理 3 (Theorem 5.1.1) $z_k=x_k\omega_k+y_k$ とおくと

$$X(\mathfrak{C})=\prod_{k=1}^{rm}\mathcal{S}(\omega_k,z_k)\mathcal{S}(\omega'_k,z'_k).$$

これは新谷による表示とは（似ているが）一般には異なる．主な相違点は $\{(\omega_k, x_k, y_k)\}$ という，$\mathfrak{C}$ に標準的に付随するデータを用いていることである．

定理 3 において，$X(\mathfrak{C})$ に対する二つの無限素点の寄与が分離しているのが見て取れる．そこで

$$X_1(\mathfrak{C}) = \prod_{k=1}^{rm} \mathcal{S}(\omega_k, z_k), \quad X_2(\mathfrak{C}) = \prod_{k=1}^{rm} \mathcal{S}(\omega'_k, z'_k)$$

とおく．本論文における最後の主結果は次の定理である：

定理 4 (Theorem 5.2.3)

$$X_1(\mathfrak{C}) = X_1(\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1) = X_1(\mathfrak{C}\mathfrak{C}_2)^{-1}, \qquad X_2(\mathfrak{C}) = X_2(\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1)^{-1} = X_2(\mathfrak{C}\mathfrak{C}_2).$$

なお定理 4 から，$\big(\chi(\mathfrak{C}_1), \chi(\mathfrak{C}_2)\big) = (+1, -1)$ のときには，$L(1,\chi)$ が $X_1(\mathfrak{C})$ のみを用いて表されることが分かる（符号が $(-1,+1)$ の場合は $X_2(\mathfrak{C})$ のみ，となる）．このことから，一般の総実代数体 K に対しても，$L(1,\chi)$ には χ の符号が正となる無限素点のみが寄与する，との予想が考えられる．

参考文献

[1] T. Shintani, On a Kronecker limit formula for real quadratic fields, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 24 (1977), 167–199.

[2] T. Shintani, On certain ray class invariants of real quadratic fields, J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 139–167.

[3] D. Zagier, A Kronecker limit formula for real quadratic fields, Math. Ann., 213 (1975), 153–184.

[4] D. Zagier, Valeurs des fonctions zêta des corps quadratiques réels aux entiers négatifs, Soc. Math. de France Astérisque, 41-42 (1977), 135–151.