論文審査の結果の要旨

氏　名　　山本　修司

虚２次体の類体は，虚数乗法をもつ楕円曲線上の楕円関数の等分点での値を用いて構成されることが良く知られている．また虚２次体の L 関数の整数点での様子についても，楕円関数を用いた多くの結果が知られている．しかし実２次体の場合，虚数乗法をもつ楕円曲線に対応するものが何かは，未だ良く分かっていない．

山本修司氏は実２次体 K の狭義合同類指標 χ に対応する L 関数 $L(s,\chi)$ の $s = 0, 1$ での様子を研究した．実２次体の L 関数の整数点での様子については, Hecke の積分公式をはじめとする様々な結果が知られているが，山本氏は特に 1970 年代の新谷卓郎と D. Zagier の研究のアイデアをうまく組み合わせることにより，彼らの結果を拡張，精密化した．新谷は，より一般に d 次の総実代数体 F の場合に，F の総正単数群 $E(F)_+$ の作用と両立する $\mathbf{R}_+^d$ の単体的錐分割を１つ選ぶことにより，L 関数を多重ゼータ関数（の一般化）を用いて記述し，その整数点での様子を研究した．特に実２次体の場合，総正単数群は１つの総正基本単数 ε で生成され，新谷は $\varepsilon^n, \varepsilon^{n+1}$ で張られる錐 $(n \in \mathbf{Z})$ による分割を用いて詳しく研究した．一方 Zagier は，χ の導手が 1 すなわち χ が狭義イデアル類群の指標である場合に，実２次体の連分数論を用いた別の錐分割を用いて，L 関数の整数点での様子を調べた．

これらの研究に関連して，山本氏が得た結果は次の通りである．
(1) Zagier の連分数論を用いた錐分割を導手が一般の場合に拡張し，それを使って L 関数の多重ゼータ関数（の一般化）を用いた記述を与えた．新谷の記述は狭義イデアル類の代表の取り方に依存するが，山本氏の表示は依存しない．また記述にあらわれるデータ（K の元と $[0,1]$ に含まれる有理数からなる．以後山本氏にならって分割データと呼ぶ）は連分数展開と関連した漸化式を用いて具体的に計算しやすい．
(2) $L(\chi, s)$ の $s = 1$ での Laurent 展開の定数項に関する Zagier の Kronecker 極限公式を，(1) を用いて導手が一般の場合へ拡張した．
(3) $L(\chi, 0)$ をベルヌイ多項式の分割データでの値と連分数展開の係数を用いて記述した．同種の公式は Herglotz, Meyer, Siegel などにより古くから知られている．また新谷は総実代数体の場合にも錐分割を用いて同様の公式を得ていた．山本氏は新谷の手法を (1) に適用した．

(4) χ の無限素点での符号数が $(1,-1)$ または $(-1,1)$ の場合に，$L'(0,\chi)$ を，符号が正の無限素点における 2 重三角関数の分割データでの値を用いて記述した．新谷も上で述べた別の分割を用いて同様の公式を示していたが，それには符号が負の無限素点での値も現れていた．連分数を用いた分割でも，アプリオリには符号が負の無限素点での値も現れるが，山本氏は 2 重三角関数の分割データにおける値のふるまいを詳しく解析することにより，負の無限素点の寄与がないことを示した．これは指標 χ に対する Beilinson 予想において，$L'(0,\chi)$ の超越的部分をあらわす regulator 写像が χ の符号が正の無限素点においてのみ現れることと対応していると思われ，興味深い．

以上のように，山本氏は実 2 次体の導手が一般の指標に対応する L 関数を連分数論を用いて調べる新しい手法を与え，特に類体の構成問題とも関連する $L'(0,\chi)$ の値についての新しい結果を得た．Zagier や新谷の研究以後 30 年近く進展のなかった分野で，このような新しい結果を得たことは評価できる．よって，論文提出者 山本修司 は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める．