論文の内容の要旨

論文題目
各葉の基本群が同型な余次元一極小葉層構造

氏名　　横山　知郎

この論文の目的は, 余次元一葉層構造が holonomy を持たないための十分条件を求めることである. 今までに, いくつかの十分条件が,Moussu と Roussarie [MR],Plante [Pl],Blanc [Bl] によって, 与えられている. 他方, 余次元一葉層構造が holonomy を持たないための必要条件は, たくさん知られている. 特に,Sacksteder が以下のことを示している.

Proposition 1. *[Sa] compact 多様体上の余次元一横断的に向き付け可能な C^2 級葉層構造が holonomy を持たないならば, 全ての葉は互いに同相である.*

そこで, 我々は, 自然に次の問いを持つ.

compact 多様体上の葉層構造が互いに同相な葉を持つならば, その葉層構造は holonomy を持たないか？

この主張は正しくない. しかし以下のような事が,Goodman と Plante によって示されている.

Proposition 2. *[GP] 多様体上の余次元一横断的に向き付け可能な C^2 級極小葉層構造の全ての葉の一次の compact supported cohomology が非自明で有限生成であるならば, その葉層構造は holonomy を持たない.*

ここで, 葉層構造が極小であるとは, 各葉が dense であることである.
また,Blanc によって, 次が示された.

Proposition 3. *[Bl] compact 空間上の横断的に向き付け可能な C^2 級極小葉層構造の各葉が end を二つ持つならば, その葉層構造は holonomy を持たない.*

ここで, これらの主張にある葉層構造は, 極小であること注意しておく. また, いくつかの end の性質を述べる.
Duminy の出版されていない結果によって, 次が示されている.

Proposition 4. *compact 多様体上の余次元一横断的に向き付け可能な C^2 級葉層構造の例外的な局所極小集合上の semiproper な葉は, Cantor 集合と同相な end を持つ.*

ここで,X が例外的局所極小集合とは, ある開 saturation$U$ 上で極小集合であり, X が U でも真葉でもないものである.
さらに,Ghys によって, 次のことが示されている:

Proposition 5. *compact 空間上の C^3 級葉層構造に関する任意の harmonic measure μ について, μ-a.e. な saturation があって, 次のうちひとつを満たす:*

0) 全ての end が 0 個である.

1) 全ての end が 1 個である.

2) 全ての end が 2 個である.

3) 全ての end が Cantor 集合と同相である.

また,Cantwell と Conlon [CC3] によって, 次が示されている.

Proposition 6. *閉多様体上の余次元一横断的に向き付け可能な C^2 級葉層構造において, 次の性質のうちの一つを満たす residual 集合がある.*

0) 全ての end が 0 個である.

1) 全ての end が 1 個である.

2) 全ての end が 2 個である.

3) 全ての end が Cantor 集合と同相である.

注意として,end がない葉は compact である. また,C^2 級葉層構造の各葉の end が一つならば, その葉層が極小であることが導かれる. これによって,C^2 級葉層構造の場合には, 次のような問題に帰着される.

Problem 1. 閉多様体上の余次元一横断的に向き付け可能な極小葉層構造の全ての葉が *end* を一つ持ちかつ同相であるならば, その葉層構造は *holonomy* を持たないか？

しかし, この問題に対して, 各葉が $S^1 \times \mathbb{R}^k (k \geq 2)$ の場合についても, わかっていなかった. そこで, これの答えとして, 我々は次の主張を示した.

Theorem 1. 多様体上の余次元一横断的に向き付け可能な横断的に実解析的極小葉層構造の各葉の基本群が $\mathbb{Z}$ と同型であるならば, その葉層構造はホロノミーを持たない.

さらに,compact 多様体上の葉層構造についてに考える. 上で述べた Duminy の定理より,$\mathcal{F}$ は例外葉を持たないので,. 葉は compact か dense である. よって, 次の corollary を得る.

Corollary 1. $\mathcal{F}$ を *compact* 多様体 M 上の余次元一横断的に実解析的な葉層構造とする. 各葉が互いに同相であり, 葉の *end* が *Cantor* 集合と同相でなく, 葉の基本群が $\mathbb{Z}$ と同型ならば, $\mathcal{F}$ は *holonomy* を持たない.

また, 問題 1 の部分的な答えとして, 以下を得た.

Theorem 2. 多様体上の余次元一横断的に向き付け可能な横断的に実解析的極小葉層構造の各葉の基本群が $\mathbb{Z}^k$ と同型であり, かつ多様体の二次のホモトピーが自明ならば, その葉層構造は *holonomy* を持たない.

最後に, 最初の問いについて, 考察した. 今のところ問いに対する反例は, 以下を満たしてる:

0) 各葉の基本群は指数的増大度を持つ.

1) 各葉は,Cantor 集合と同相な end を持つ.

そこで, 以下のような問題が提起される.

Problem 2. *compact* 多様体上の葉層構造が互いに同相な葉を持ち, かつその葉の基本群が指数増大度を持たないならば, その葉層構造は *holonomy* を持たないか？

今のところ, これに対する一般的な解はない. しかし, 次のようなことはわかっている:

Corollary 2. $\mathcal{F}$ を, 多様体 M 上の余次元一横断的に向き付け可能な極小 C^0 級葉層構造とする. $\mathcal{F}$ が *vanishing cycles* を持たないとする.. 各葉の基本群が同型であり, かつ正確に多項式増大度を持っているとならば, $\mathcal{F}$ は *holonomy* を持たない.

参考文献

[Bl] Blanc, E. *Propriètès gènèriques des laminations* Thèse de l' Universitè LYON-1

[CC3] Candel, A.; Conlon, L. *Generic leaves* Comment. Math . Helv. 73 (1998) 306-336.

[Gh] Ghys, Ètienne *Topologie des feuilles gènèriques.* Ann. of Math. (2) 141 (1995), no. 2, 387–422.

[GP] Goodman, S. E.; Plante, J. F. *Holonomy and averaging in foliated sets.* J. Differential Geom. 14 (1979), no. 3, 401–407.

[MR] Moussu, Robert; Roussarie, Robert *Une condition suffisante pour qu'un feuilletage soit sans holonomie.*

[Pl] Plante,J.F. *Foliations with measure preserving holonomy* Ann. of Math. (2) 102 (1975), no. 2, 327–361. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1987

[Sa] Sacksteder, R. *Foliations and pseudogroups.* Amer. J. Math. 87 1965 79–102.