

論文の内容の要旨

論文題目: Inverse Problems for Maxwell's Equations and Second Order Hyperbolic Equations
(マクスウェル方程式と2階双曲型方程式に対する逆問題)

氏名: 李書敏 (SHUMIN LI)

本論文では, 空間的に一様でない非等方性媒質における非定常のマクスウェル方程式の解の観測データから, 媒質の物性を決定する逆問題ならびに2階双曲型方程式に関する逆問題を考察した.

物性が空間方向によって著しく異なる非等方性は結晶構造を考察する際に基本的な性質であり, そのような性質を有するシリコンなどは例えばマルチメディア技術の基本材料である. 非等方性の空間分布の決定や評価は工学等の応用面において重要な課題である. 類似の逆問題はすでに等方性媒質の双曲型方程式に関して考察され理論的な成果があるが, 応用上の重要性にも関わらず非等方性の場合には結果がほとんどない.

本論文の第1, 2, 3, 4章では, 非等方性媒質におけるマクスウェル方程式に現れる空間変数に依存する物性を表す係数を決定するという逆問題に対して, 重み付きの L^2 -評価であるカーレマン評価による方法を用いて, 有限回の境界観測によって一意性と安定性を証明した.

このような有限回の観測の反復による逆問題の定式化は無限回の観測が必要なディリクレ・ノイマン写像による定式化よりはるかに実用的であるが, 入力として加えるべき初期値がある種の正值性を満たす必要がある. 初期値を0としてデルタ関数で表される外力のみを加えて得られる解の境界観測値によって係数を決定するという逆問題は実際の定式化であるが, 2階双曲型方程式に対して未知の係数あるいは領域が十分小さいという条件の下に限って局所的な安定性がようやく最近になって証明されたに過ぎない. 本論文の第5章では新たなカーレマン評価を確立して, このような制限条件を緩和した.

以下, D, B, E, H はそれぞれ電束密度, 磁束密度, 電界強度, 磁界強度を表わす場所 x と時刻 t に依存するベクトル場とし, x_j は x の j -成分で $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ とおき, ∇ は空間変数に関する勾配とする. さらに $\Omega \subset R^3$ または R^2 は滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域で, $Q = \Omega \times (-T, T)$ とし, $\nu(x)$ は x における $\partial\Omega$ の単位外向き法線ベクトルを表わす. 以下に各章ごとに主要結果を述べるが, そのために必要な観測時間などの所与の条件はより直接的に記述できるが, 詳細は本文に譲る.

1 第1章の結果について

双等方的 (bi-isotropic) と呼ばれる非等方性を持つ媒質におけるマクスウェル方程式を考察した.

$$\begin{cases} \partial_t D(x, t) - \nabla \times H(x, t) = 0, \\ \partial_t B(x, t) + \nabla \times E(x, t) = 0, \\ \nabla \cdot D(x, t) = \nabla \cdot B(x, t) = 0, & (x, t) \in Q, \\ D(x, 0) = d(x), \quad B(x, 0) = b(x), & x \in \Omega, \\ \nu(x) \times E(x, t) = q(x, t), & x \in \partial\Omega, t \in (-T, T), \end{cases}$$

ここで、双等方的とよばれる非等方性のために D, B, E, H の間には次のような状態方程式が成り立っている:

$$D(x, t) = \varepsilon(x)E(x, t) + \zeta(x)H(x, t), \quad B(x, t) = \zeta(x)E(x, t) + \mu(x)H(x, t), \quad (x, t) \in Q.$$

誘電率 ε , 透磁率 μ ならびに磁気誘電率 ζ を決定する逆問題について一意性ならびに安定性を証明した。すなわち、未知の3つの実数値関数 ε, ζ, μ は $C^2(\bar{\Omega})$ のノルムで有界な集合 U に限定されていると仮定した。ここで集合 U は十分に多くの係数を含む集合であることもわかる。このとき、初期値ならびに境界値を2回選んで (すなわち (d^j, b^j, q^j) , $j = 1, 2$) 対応する解 $D_j(\varepsilon, \zeta, \mu)$, $B_j(\varepsilon, \zeta, \mu)$ の境界 $\partial\Omega$ の近傍 ω での値を観測することによって3つの係数の決定逆問題を考えた。結果の概略は以下の通りである。

定理 1.1(安定性). $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$, $e_3 = (0, 0, 1)^T$ とおく. $T > 0$ は十分大きいとし、次の行列

$$G = \begin{bmatrix} 0 & e_1 \times d^1 & e_1 \times b^1 & 0 & e_2 \times d^1 & e_2 \times b^1 & 0 & e_3 \times d^1 & e_3 \times b^1 \\ e_1 \times d^1 & e_1 \times b^1 & 0 & e_2 \times d^1 & e_2 \times b^1 & 0 & e_3 \times d^1 & e_3 \times b^1 & 0 \\ 0 & e_1 \times d^2 & e_1 \times b^2 & 0 & e_2 \times d^2 & e_2 \times b^2 & 0 & e_3 \times d^2 & e_3 \times b^2 \\ e_1 \times d^2 & e_1 \times b^2 & 0 & e_2 \times d^2 & e_2 \times b^2 & 0 & e_3 \times d^2 & e_3 \times b^2 & 0 \end{bmatrix},$$

の9次の小行列式で $\bar{\Omega}$ で一様に正值なものが存在するとする。そのとき、対応 $(\varepsilon, \zeta, \mu) \mapsto \{D_j(\varepsilon, \zeta, \mu), B_j(\varepsilon, \zeta, \mu)\}_{j=1,2}$ は $U \subset (C^2(\bar{\Omega}))^3$ から $\{(H^2(\omega \times (-T, T)))^6\}^2$ への写像と考えると1対1であり、逆写像はリプシッツ連続である。

2 第2章の結果について

空間次元が2の場合に、一般の非等方性媒質におけるマクスウェル方程式(*)を状態方程式(**)とともに考えた:

$$(*) \quad \begin{aligned} \partial_t D_1(x, t) - \partial_2 H_3(x, t) &= f_1(x, t), & \partial_t D_2(x, t) + \partial_1 H_3(x, t) &= f_2(x, t), \\ \partial_t B_3(x, t) + \partial_1 E_2(x, t) - \partial_2 E_1(x, t) &= f_3(x, t), & \partial_1 D_1(x, t) + \partial_2 D_2(x, t) &= f_0(x, t), \end{aligned}$$

$$(**) \quad \begin{pmatrix} D_1(x, t) \\ D_2(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(x) & \varepsilon_2(x) \\ \varepsilon_2(x) & \varepsilon_3(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1(x, t) \\ E_2(x, t) \end{pmatrix}, \quad B_3(x, t) = \mu(x)H_3(x, t).$$

ここで、2次元の非等方性から透磁率 $\mu(x)$ は実数値関数であるが、誘電率 $\varepsilon(x)$ は 2×2 の正定値行列となる:

$$\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(x) & \varepsilon_2(x) \\ \varepsilon_2(x) & \varepsilon_3(x) \end{pmatrix}.$$

解の観測データから総計4つの係数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \mu$ を決定する逆問題のリプシッツ連続性を示すためにはカーレマン評価を確立すれば十分である。 ε, μ に関して第1章と類似の制限条件の下で以下を証明した。

定理 2.1(カーレマン評価). ある正定数 $C, s_0 > 0$ が存在して (*), (**) を満たす $D_1, D_2, B_3 \in H_0^1(Q)$ とすべての $s \geq s_0$ に対して

$$s \int_Q (|D_1|^2 + |D_2|^2 + |B_3|^2) e^{2s\varphi} dx dt \leq C \int_Q \left| \sum_{j=0}^3 |f_j|^2 e^{2s\varphi} \right| dx dt.$$

ここで、 $\varrho, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ は Q と係数によって決まり、 $\varphi(x, t) = e^{\varrho(|x-x_0|^2 - \beta t^2 - \lambda^2)}$ である。

さらに、境界入力によって与えられた状態に時刻 T で系を制御するという完全可制御性と同値なエネルギー評価式も同時に証明した。

3 第3章の結果について

2次元の一般の非等方性媒質のマクスウェル方程式に関して、第2章で示したカーレマン評価を用いて、ある正値性が満足されるように初期値を適切な方法で5回選んで、対応する解の $\partial\Omega \times (0, T)$ におけるデータによって誘電率テンソルならびに透磁率を決定する逆問題を考察した。適切な集合に未知係数が制限されていることを仮定して、十分大きな T に対して定理 1.1 と同様なリプシッツ連続性を本逆問題に対して証明した。

4 第4章の結果について

本章では非等方性媒質における、次のような空間3次元の非等方性媒質におけるマクスウェル方程式について、アンテナに対応する $\mathbf{R}(x, t)F(x', t)$ における空間変数の2つの成分ならびに時間に依存する因子 F を決定する逆問題を考えた。

$$\partial_t(\varepsilon(x', t)E(x, t)) - \nabla \times H(x, t) + \mathbf{R}(x, t)F(x', t) = 0, \quad \partial_t(\mu(x', t)H(x, t)) + \nabla \times E(x, t) = 0, \quad (x, t) \in R_+^4,$$

$$E(x, 0) = H(x, 0) = 0, \quad x \in R^3.$$

ここで、 $R_+^4 = \{(x, t); x \in R^3, t \geq 0\}$, $x = (x', x_3) = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, $\mathbf{R}(x, t)$ は既知の 3×3 行列、 $F = (f_1, f_2, f_3)^T$ であって、 $\varepsilon = (\varepsilon_{kl})_{3 \times 3}$, $\mu = (\mu_{kl})_{3 \times 3}$ は、それぞれ誘電率テンソル、透磁率テンソルである。

定理 4.2(安定性). $\mathbf{R}, \varepsilon, \mu$ は十分滑らかとし、与えられた正値性を満足すると仮定する。 $\alpha > 0$, $\kappa < \alpha$ と十分小さな定数 $\beta > 0$ に対して、 $Q_0 = \{(x, t) \in R_+^4; \alpha - t - \beta|x|^2 > 0, t > 0\}$, $\Gamma_0 = \{(x', t) \in R^3; \alpha - t - \beta|x'|^2 > 0, t > 0\}$, $\Gamma_\kappa = \{(x', t) \in R^3; 0 < t < \alpha - \kappa - \beta|x'|^2\}$ とおく。このとき、任意の $\kappa \in (0, \alpha)$ に対して、ある定数 $C > 0$ が存在して、

$$\|F\|_{L^2(\Gamma_\kappa)} \leq C [\|E\|_{H^2(Q_0)} + \|H\|_{H^2(Q_0)}]^{\frac{3\alpha-3\kappa}{3\alpha-2\kappa}} [\|E(\cdot, 0, \cdot)\|_{H^1(\Gamma_0)} + \|H(\cdot, 0, \cdot)\|_{H^1(\Gamma_0)}]^{\frac{3\kappa}{3\alpha-2\kappa}}.$$

5 第5章の結果について

爆破地震学におけるモデル方程式である

$$\partial_t^2 u(x, t) - \Delta u(x, t) + q(x)u(x, t) = \delta(x_1)\delta'(t), \quad u|_{t < 0} = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$$

を研究した。ここで $\delta(x_1)$ は $x_1 = 0$ に台をもつディラックのデルタ関数、 δ' は t についての導関数であり、初期時刻で爆薬などによる衝撃的な力を加えて媒質を振動させて、物性 $q(x)$ を決定することが地質探査などのために考えられているが、その数学的基礎を与えた。 $\bar{\Omega} \subset \{x_1 > 0\}$ となる有界領域 $\Omega \subset R^n$ に対して、 $S_T = \{(x, t); x \in \partial\Omega, x_1 < t < T + x_1\}$, $\Sigma_T = \{(x, t); x \in \Omega, t = T + x_1\}$, $\Sigma_0 = \{(x, t); x \in \Omega, t = x_1 + 0\}$ とおく。主要結果は以下のように述べることができる。

定理 5.1. T は十分大きいとする。このとき与えられた定数 $M > 0$ に対して、 $\|q\|_{H^{n+2}(R^n)} \leq M$ である限り、 M のみに依存する定数 $C > 0$ が存在して、

$$\|q\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left\{ \|u\|_{H^1(S_T)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{L^2(S_T)} \right\}.$$

証明のために、 Σ_T, Σ_0 ならびに S_T によって囲まれた領域だけではなく、 Σ_T, Σ_0 という特性面における u の導関数も評価する、既存文献にはないカーレマン評価を確立した。