

論文審査の結果の要旨

氏名： 李書敏

李書敏氏は、電磁的な性質が空間変数に依存する一様でない非等方性媒質における非定常のマクスウェル方程式の解の観測データから媒質の物性を決定する逆問題、ならびに衝撃的な外力を持つ2階双曲型方程式に関する逆問題を考察した。

物性が方向によって著しく異なる非等方性は結晶構造を考察する際に基本的な性質であり、物性の決定は工学等の応用面において重要な課題であるにも関わらず非等方性の場合には結果がほとんどない。

本論文の第1, 2, 3, 4章では、いくつかの非等方性媒質におけるマクスウェル方程式について状態方程式に現れる物質定数を決定する逆問題を考察し、重み付きの L^2 -評価であるカーレマン評価による方法を用いて、有限回の境界観測によって一意性と安定性を証明した。

まず、第1章では双等方的 (biisotropic) と呼ばれる非等方性を持つ媒質におけるマクスウェル方程式を考察した。すなわち、電束密度 D 、磁束密度 B 、電界強度 E 、磁界強度 H の間に次のような状態方程式が成り立っており、誘電率 ε 、透磁率 μ ならびに磁気誘電率 ζ を決定する逆問題について一意性ならびに安定性を証明した。

$$D(x, t) = \varepsilon(x)E(x, t) + \zeta(x)H(x, t), \quad B(x, t) = \zeta(x)E(x, t) + \mu(x)H(x, t).$$

未知の3つの実数値関数 ε, ζ, μ が物理的に許容できる集合に属しているという仮定の下で、初期値を適切に2回選択することによって得られる解の境界付近での値を十分長く観測することによって、それら3つの関数が一意的に決定でき、しかもその対応がリップシッツ連続であることを証明した。

第2, 3章において空間次元が2の場合に、一般の非等方性媒質におけるマクスウェル方程式を考えた。非等方性を記述する総計4つの誘電率テンソルならびに透磁率とよばれる未知係数を決定する逆問題の数学解析を行った。すなわち、ある正值性が満足されるように初期値を適切な方法で5回選んで、対応する解の境界付近でのデータによって誘電率テンソルならびに透磁率を決定する逆問題を考察した。適切な集合に未知係数が制限されていることを仮定して、十分長い観測時間をとることによって、第1章と同様なりリップシッツ連続性を証明した。さらに、制御論における基本的な課題である完全可制御性と同値なエネルギー評価式も証明した。

第 4 章においては、空間 3 次元の非等方性媒質におけるマクスウェル方程式について、アンテナの空間変数の 2 成分ならびに時間に依存する因子を決定する逆問題を考え、一意性およびヘルダー連続性を証明した。ここで得られたヘルダー連続性はあるレベル集合での空間局所的な評価式である。

第 5 章においてはディラックのデルタ関数で記述される衝撃的外力をもつ波動方程式

$$\partial_t^2 u(x, t) - \Delta u(x, t) + q(x)u(x, t) = \delta(x_1)\delta'(t), \quad u|_{t < 0} = 0, x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$$

を研究した。これは、初期時刻で釣り合いの位置にあって静止している媒質に爆薬などによる衝撃的な力を加えて媒質を振動させて、物性 $q(x)$ を決定するという爆破地震学におけるモデルであり、対応する逆問題の数学解析は地質探査の理論的な根拠である。第 4 章までのような有限回の観測の反復による逆問題の定式化は Dirichlet to Neumann 写像による定式化よりはるかに実用的であるが、入力として加えるべき初期値がある種の正值性を満たす必要がある。本章では初期値を 0 としてデルタ関数で表される外力のみを加えて境界観測によって係数を決定するという逆問題の 1 つの実際的な定式化を考察した。

このとき、解の境界でのコーシーデータから係数 $q(x)$ を決定する逆問題について一意性およびリプシッツ連続性を証明した。これまでは、考えている空間領域または未知係数が充分小さいという制限条件の下での結果しかなかったが、そのような制限条件を大幅に緩和した。

同氏による上記の成果は古典的な偏微分方程式論に基づく精緻な評価を確立することによってなされたものである。キーとなるカーレマン評価は非等方性のため、従来のヘルマンダーらによる一般論から証明することが困難であり、格別の工夫が必要であった。さらに第 5 章では解の領域内部だけではなく、特性面での値までも評価する新たなカーレマン不等式を始めて証明するなど、独創性を随所に認めることができ、応用上も重要な非等方性の場合の逆問題ならびに双曲型方程式の逆問題の数学的研究への寄与が著しい。よって、論文提出者 李 書敏 は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。