論文の内容の要旨

論文題目　自由群の自己同型群のホモロジー，及び付随するリー代数の組み合わせ群論的研究

氏　名　佐藤 隆夫

この論文は3部構成であり，第1部では，自由群の自己同型群のねじれ係数2次元ホモロジー群の組み合わせ群論的な計算を紹介する．また，第2部では，自由群の自己同型群のJohnson準同型の全射性に関する新しい障害の構成を考える．最後に第3部では，自由群の合同IA-自己同型群と呼ばれる，自由群の自己同型群のある正規部分群に関して，そのアーベル化を決定する．以下はそれぞれの要旨である．

第1部：自由群の自己同型群のねじれ係数2次元ホモロジー群について．

n を2以上の整数，F_n を階数 n の自由群，$\mathrm{Aut}\,F_n$ を自由群 F_n の自己同型群とする．また，H を F_n のアーベル化，$H^* = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(H, \mathbf{Z})$ をその $\mathbf{Z}$-双対加群とする．すると，自由群の自己同型群 $\mathrm{Aut}F_n$ は自然に H，従って，H^* に作用する．論文 [7] では，これらの作用に関する $\mathrm{Aut}\,F_n$ のねじれ係数1次元ホモロジー群を，自由群の自己同型群の表示を用いて計算した．第1部では，同作用に関する2次元ホモロジー群が，係数環が1/2を含むような場合に，0となることを示した．即ち，$L := \mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ を有理整数環 $\mathbf{Z}$ に1/2を添加して得られる $\mathbf{Q}$ の部分環とし，任意な $\mathbf{Z}$-加群 M に対して，係数を L に拡大した L-加群を $M_L := M \otimes_{\mathbf{Z}} L$ とおく．このとき，以下のような結果が得られた．

定理 1 $n \geq 6$ のとき，

$$H_2(\mathrm{Aut}\,F_n, H_L) = 0, \qquad H_2(\mathrm{Aut}\,F_n, H_L^*) = 0.$$

最近，Hatcher及び，Wahl [3] らは，ある3次元多様体の写像類群のホモロジーの安定性を考察することにより，$n \geq 3i + 9$ のとき，

$$H_i(\mathrm{Aut}\,F_n, H) = 0$$

となるという，注目すべき結果を得た．従って $n \geq 15$ のとき，我々の結果のひとつである $H_2(\mathrm{Aut}\,F_n, H_L) = 0$ は，彼らの結果から直ちに得られることが分かる．しかしながら，我々の手法は彼らのものとは全く異なり，自由群の自己同型群の表示を用いて組み合わせ群論的に行われる．群の表示を用いて計算することの利点の一つは，彼らの手法では直接計算できない，$H_2(\mathrm{Aut}\,F_n, H^*)$ の場合についても計算できるところにある．計算の概略は以下の通りである．まず，$\mathrm{Aut}F_n$ の H への作用により，自然な全射準同型写像

$$\rho : \mathrm{Aut}\,F_n \to GL(n, \mathbf{Z})$$

が得られるが，この ρ による $SL(n,\mathbf{Z})$ の逆像を Aut^+F_n とおき，自由群の特殊自己同型群と呼ぶ．Gersten [2] により，Aut^+F_n は有限表示を持つことが知られている．いま，これを $\langle X\,|\,R\rangle$ とおき，F を X 上の自由群，$\bar{R}$ を F における R の正規閉包とすれば自然な完全系列

$$1\to\bar{R}\to F\to\mathrm{Aut}^+F_n\to 1$$

が得られる．この完全系列が誘導するホモロジー群の5項完全系列を考察することによって，Aut^+F_n のねじれ係数2次元ホモロジー群が算出される．これらの結果を用いて $\mathrm{Aut}\,F_n$ のホモロジー群が計算される．

第2部：自由群の自己同型群の Johnson 準同型の全射性に関する新しい障害について.

第2部では自由群の自己同型群に付随するリー代数，特にその斉次成分に関する考察を行う．$\Gamma_n(1)=F_n$, $\Gamma_n(2),\ldots$ を F_n の降中心列とする．各 $k\geq 0$ に対して，$F_n/\Gamma_n(k+1)$ に自明に作用する $\mathrm{Aut}\,F_n$ の元全体を $\mathcal{A}_n(k)$ とおくと，自由群の自己同型群の正規部分群の降下列

$$\mathrm{Aut}\,F_n=\mathcal{A}_n(0)\supset\mathcal{A}_n(1)\supset\mathcal{A}_n(2)\supset\cdots$$

が得られる．Andreadakis [1] によって，これは中心列となることが知られている．各 $k\geq 1$ に対し，次数商 $\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)=\mathcal{A}_n(k)/\mathcal{A}_n(k+1)$ は有限生成アーベル群であり，その次数和を $\mathrm{gr}(\mathcal{A}_n)$ とおくと，$\mathrm{gr}(\mathcal{A}_n)$ には，$\mathcal{A}_n(1)$ の交換子積から誘導される自然なブラケット積により，$\mathbf{Z}$ 上のリー代数の構造が入る．これを $\mathrm{Aut}\,F_n$ に付随するリー代数と呼ぶ．各次数商 $\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ は $\mathrm{Aut}\,F_n$ の逐次近似とみなすことができ，これの構造を調べることは $\mathrm{Aut}\,F_n$ のホモロジーを考察する上でも重要である．しかしながら，一般に $\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ の構造は殆ど解っておらず，$k=1,2$ の場合にその階数が知られているくらいであった．第2部の目的の一つは，$\mathrm{gr}^3(\mathcal{A}_n)$ の階数を求めることにある．

$\mathcal{L}_n=\bigoplus_{k\geq 1}\mathcal{L}_n(k)$ を H が生成する $\mathbf{Z}$ 上の自由リー代数とする．$\mathrm{Aut}\,F_n$ に付随するリー代数の各次数商 $\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ の構造を調べる強力な手段の一つとして，Johnson 準同型写像

$$\tau_n(k):\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)\to H^*\otimes_{\mathbf{Z}}\mathcal{L}_n(k+1)$$

が定義される．各 Johnson 準同型写像は $GL(n,\mathbf{Z})$-同変であり，構成の仕方から単射である．$k=1$ のとき Johnson 準同型は全射，したがって同型になることが知られているが，$k\geq 2$ のとき，Johnson 準同型は全射ではない．実際，森田 trace と呼ばれる $GL(n,\mathbf{Z})$ 同変な全射準同型写像

$$\mathrm{Tr}_k:H^*\otimes_{\mathbf{Z}}\mathcal{L}_n(k+1)\to S^kH$$

であって，Johnson 準同型写像の像に制限すると零写像となるものが，森田茂之によって構成されている．ここで，S^kH は H の k 次対称テンソルを表す．

さて，部分群 $\mathcal{A}_n(1)$ は自由群の IA-自己同型群と呼ばれ，IA_n とも表される．$\mathcal{A}'_n(1)$, $\mathcal{A}'_n(2),\ldots$ を IA_n の降中心列とする．定義から明らかに $\mathcal{A}'_n(k)\subset\mathcal{A}_n(k)$ であるが，現在，これらは完全に一致することが予想されている．実際，$n=2$ のときは一致し，$n\geq 3$ に対しては $\mathcal{A}'_n(2)=\mathcal{A}_n(2)$, ([4] 参照.) 及び，$\mathcal{A}'_n(3)$ は $\mathcal{A}_n(3)$ の中で指数有限となることが知られている．([6] 参照.) 従って，$\mathcal{A}'_n(k)$ たちを考察することは，$\mathcal{A}_n(k)$ たちを調べる上でも重要である．特に，$\mathcal{A}'_n(k)$ を考えることの利点は，$\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}'_n)$ の生成元が，IA_n の生成元の交換子として帰納的に得られる点にある．今，上述の Johnson 準同型と同様な方法により $GL(n,\mathbf{Z})$-同変な準同型写像

$$\tau'_k:\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}'_n)\to H^*\otimes_{\mathbf{Z}}\mathcal{L}_n(k+1)$$

が定義される．これも $\mathrm{Aut}\,F_n$ の Johnson 準同型と呼ぶ．第2部の主な目的は，この τ'_k の全射性に関する新しい障害を構成することにある．以下，便宜的に，$\mathbf{Z}$-加群 M に対して，係数環を $\mathbf{Q}$ に拡大した $\mathbf{Q}$-ベクトル空間を，M に添え字 $\mathbf{Q}$ をつけて表すことにする．また，$\mathbf{Z}$-加群の間の準同型写像 f が誘導する $\mathbf{Q}$-ベクトル空間の間の写像も同様に，添え字 $\mathbf{Q}$ を付けて $f_{\mathbf{Q}}$ などと表すことにする．このとき，次の結果を得た．

定理 2

(1) $3 \leq k \leq n$ を満たす奇数 k に対し，$\Lambda^k H_{\mathbf{Q}} \subset \mathrm{Coker}\,\tau'_{k,\mathbf{Q}}$.

(2) $4 \leq k \leq n-1$ を満たす偶数 k に対し，$H_{\mathbf{Q}}^{[2,1^{k-2}]} \subset \mathrm{Coker}\,\tau'_{k,\mathbf{Q}}$.

ここで，$\Lambda^k H_{\mathbf{Q}}$ は $H_{\mathbf{Q}}$ の k 次交代テンソル，$H_{\mathbf{Q}}^{[2,1^{k-2}]}$ は k の分割 $[2,1^{k-2}]$ に対応する，$H_{\mathbf{Q}}$ の *Schur-Weyl* 加群である．

この定理を証明するために，以下のような，$GL(n,\mathbf{Z})$-同変な準同型写像であって，Johnson 準同型写像 τ'_k の像に制限すると零写像となるものを構成した．

$$\mathrm{Tr}_{[1^k]} : H^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{L}_n(k+1) \to \Lambda^k H,$$

$$\mathrm{Tr}_{[2,1^{k-2}]} : H^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{L}_n(k+1) \to H \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda^{k-1} H$$

これらの写像は，森田 trace と構成の仕方が似ているので，trace 写像と呼ぶことにする．trace 写像が Johnson 準同型写像 τ'_k の像に制限すると零写像となることが証明の重要なポイントであるが，これは τ'_k たちの和 $\tau' = \oplus_{k \geq 1} \tau'_k$ が，$\mathcal{A}_n(1)$ の降中心列に付随するリー代数から，H 上の自由リー代数の微分代数への，リー代数としての準同型になるという性質を用いて，帰納的に証明される．

さて，上述のように，$\mathcal{A}_n(2) = \mathcal{A}'_n(2)$ 及び，$\mathcal{A}'_n(3)$ は $\mathcal{A}_n(3)$ の中で有限指数であるので，$k = 2,3$ のとき，$\mathrm{Coker}\,\tau'_{k,\mathbf{Q}} = \mathrm{Coker}\,\tau_{k,\mathbf{Q}}$ である．一方，Magnus [5] によって，$IA_n = \mathcal{A}_n(1)$ の有限生成系が与えられており，これより各次数商 $\mathrm{gr}^2(\mathcal{A}_n)$，$\mathrm{gr}^3_{\mathbf{Q}}(\mathcal{A}_n)$ の生成元が記述される．このとき，それらの像を計算することにより，以下の結果を得た．

定理 3 $n \geq 3$ に対して，

$$0 \to \mathrm{gr}^2(\mathcal{A}_n) \to H^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{L}_n(3) \to S^2 H \to 0$$

及び，

$$0 \to \mathrm{gr}^3_{\mathbf{Q}}(\mathcal{A}_n) \to H^*_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{L}^{\mathbf{Q}}_n(4) \to S^3 H_{\mathbf{Q}} \oplus \Lambda^3 H_{\mathbf{Q}} \to 0$$

は $GL(n,\mathbf{Z})$-同変な完全系列である．

この定理の系として，以下を得た．

系 1 $n \geq 3$ に対して，

$$\mathrm{rank}_{\mathbf{Z}}\, \mathrm{gr}^3(\mathcal{A}_n) = \frac{1}{12} n(3n^4 - 7n^2 - 8).$$

第3部：自由群の合同 IA 自己同型群のアーベル化について．

第3部では，$GL(n,\mathbf{Z})$ の主合同部分群に対応する，$\mathrm{Aut}\,F_n$ の正規部分群のアーベル化を考察する．まず，第1部で考えた準同型写像 $\rho : \mathrm{Aut}\,F_n \to GL(n,\mathbf{Z})$ に対して，$\ker(\rho) = IA_n$ であった．$n \geq 2$ 及び，$d \geq 2$ に対して，$GL(n,d)$ を $\mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ 上の一般線形群とし，$\pi_d : GL(n,\mathbf{Z}) \to GL(n,d)$ を法 d による還元が誘導する自然な準同型写像とする．また，level d の主合同部分群を $\Gamma(n,d) := \ker(\pi_d)$ と表す．さて，合成写像 $\pi_d \circ \rho : \mathrm{Aut}\,F_n \to GL(n,d)$ の核を $IA_{n,d}$ とおいて，level d の自由群の合同 IA-自己同型群と呼ぶ．このとき，$IA_{n,d}$ のアーベル化について以下の結果が得られた．

定理 4 $n \geq 2$ 及び，$d \geq 2$ に対して，

$$IA_{n,d}^{\mathrm{ab}} \simeq (IA_n^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}) \bigoplus \Gamma(n,d)^{\mathrm{ab}}.$$

この定理は，群の完全系列

$$1 \to IA_n \to IA_{n,d} \xrightarrow{\rho} \Gamma(n,d) \to 1$$

のホモロジカル 5 項完全系列

$$H_2(IA_n, \mathbf{Z}) \to H_2(IA_{n,d}, \mathbf{Z}) \to H_0(\Gamma(n,d), IA_n^{\mathrm{ab}}) \xrightarrow{\eta} IA_{n,d}^{\mathrm{ab}} \to \Gamma(n,d)^{\mathrm{ab}} \to 0$$

において，η が分裂単射となることを自由群の自己同型群の "拡張された" Johnson 準同型を用いて示すことによって得られる．ここで言う "拡張された" Johnson 準同型とは，[4] において河澄響矢が自由群の Magnus 展開を用いて構成したもので，[4] ではこれを用いて，IA_n のアーベル化が $GL(n,\mathbf{Z})$-加群として $H^* \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda^2 H$ に同型となることが示されている．

一方，$IA_{n,d}$ の，自由群の外部自己同型群における像を考える．即ち，$\mathrm{Inn}\, F_n$ を自由群 F_n の内部自己同型群とするとき，剰余群 $IA_{n,d}/\mathrm{Inn}\, F_n$ を $IO_{n,d}$ とおく．このとき，$IO_{n,d}$ のアーベル化に関して以下のような結果が得られた．

定理 5 $n \geq 2$ 及び，$d \geq 2$ に対し，

$$IO_{n,d}^{\mathrm{ab}} \simeq (IO_n^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}) \bigoplus \Gamma(n,d)^{\mathrm{ab}}.$$

謝辞

この博士論文を製作するに際して，河澄響矢先生のご指導，及び数々のご助言に心より感謝致します．また，著者の研究内容について，度々の相談にも快く応じて下さり，ご助言を頂いた森田茂之先生のご厚意にも深く感謝致します．最後に，著者が東京都立大学在学中にお世話になった指導教官で，大学院在学中も研究に関して数々のご助言と激励を下さった，岡山大学の中村博昭先生に改めて心から感謝致します。

参考文献

[1] S. Andreadakis; On the automorphisms of free groups and free nilpotent groups, Proc. London Math. Soc. (3) 15 (1965), 239-268.

[2] S. M. Gersten; A presentation for the special automorphism group of a free group, J. Pure and Applied Algebra 33 (1984), 269-279.

[3] A. Hatcher and N. Wahl; Stabilization for the automorphisms of free groups with boundaries, Geometry and Topology, Vol. 9 (2005), 1295-1336.

[4] N. Kawazumi; Cohomological aspects of Magnus expansions, preprint, The University of Tokyo. UTMS 2005-18 (2005), `http://xxx.yukawa.kyoto-u.ac.jp/abs/math.GT/0505497`.

[5] W. Magnus; Über n-dimensinale Gittertransformationen, Acta Math. 64 (1935), 353-367.

[6] A. Pettet; The Johnson homomorphism and the second cohomology of IA_n, Algebraic and Geometric Topology 5 (2005) 725-740.

[7] T. Satoh; Twisted first homology group of the automorphism group of a free group, Journal of Pure and Applied Algebra, to appear.