論文の内容の要旨

論文題目 ：Morrey spaces for non-doubling measures.
和訳：Doubling条件を満たしていない測度に対する Morrey空間

氏名　澤野　嘉宏

この論文の目的は，Doubling 条件を満たしていない $\mathbf{R}^d$ の測度空間上の Morrey 空間を定義してそこでの Cardeón-Zygmund 理論を展開することにある．この論文で論じられているのは Doubling 条件を満たしていない $\mathbf{R}^d$ 上の測度空間と Morrey 空間の交差点である．１９３８年 C. Morrey は関数の滑らかさとの関連で Morrey ノルムの原型となるものを定義した [3]．その後１９５０年代において，S. Campanato によって Campanato 型のノルムが考えられて Morrey ノルムとの同値性が後に発見された [1]．その後 Morrey 空間は Navier Stokes やその他楕円型微分方程式に活用されるようになった．

一方，極大作用素を中心とする理論は調和解析で主流である．調和解析において，今までは Doubling 条件は基本的な測度に対する仮定であった．すなわち，$\mathbf{R}^d$ において $B(x,r)$ を x 中心の半径 r の球とするとき，$x \in \operatorname{supp}(\mu)$ にたいして，$\mu(B(x,2r)) \le c_0\mu(B(x,r))$ を満たしているというのは，非常に基本的な仮定であった．しかし，１９９８年に Nazarov, Treil, Volberg たちがこの条件をはずして Calderón-Zygmund 理論を展開出来ること示した．増大条件を仮定するだけで，Doubling 条件を仮定しなくても大丈夫なのである．増大条件とは

$$\mu(B(x,r)) \le c_0\, r^n$$

を満たしていることを言う．彼らに加えて Tolsa などは，この測度をうまく使って，解析的容量の性質を示した．特に，Tolsa による解析的容量の劣加法性や両リプシッツ不変性は著しい結果である．Nazarov,Treil,Volberg たちはパラメーターの入った BMO を用いて T1 定理を証明して見せた．Doubling 条件のない T1 定理は，非常に巧妙なものであった．Tolsa はこれに加えて，BMO 空間の代替となる RBMO を定義して古典的な BMO 空間の性質の多くを復元してみせた．

この代替のRBMOにおいてもT1定理は復元されている．Tolsaはこのほかに，Littlewood-Paley分解を構成しており，これらはYangはHanの構成したTriebel-Lizorkin空間，Besov空間の構成に貢献している．このように多種の古典的な関数空間が構成されているが，そのうちのひとつMorrey空間を増大条件を満たしている測度に関してのCalderón-Zygmund理論に合うように構成するのが，われわれの目的である．

このように，多様な関数空間が出来ている中われわれはMorrey空間の理論を構築した．モレーノルムを

$$\|f : \mathcal{M}^p_q(k,\mu)\| := \sup_{Q\,:\,\text{立方体},\ \mu(Q)>0} \mu(kQ)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_Q |f(y)|^q \, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}$$

と定義する．$p=q$とすることでルベーグ空間の拡張になっていることがわかる．このノルムの一番著しい性質は，$k>1$ならば，互いに同値なノルムを定義するところである．この柔軟な性質が，Calderón-Zygmund理論の展開に重要な役割を果たす．初めに，この関数空間に関して見つけられた先ほどの柔軟性との関連で著しい性質はVolbergらによって定義された修正極大作用素が有界になることである．

しばしば，non-doubling条件を満たしていない測度空間では，増大条件を仮定しないといけないが，われわれの理論のうちかなりの部分がdoubling条件なしで成立することも示されてきた．doubling条件を要求するのは特異積分作用素やSharp-極大作用素などである．

研究の過程で一般にMorrey空間はSharp-極大作用素の不等式に対して補足的な役割を持つことが示された．この論文では，Sharp-極大作用素に対するMorrey空間の効用を扱う．古典的には

$$M^\sharp f(x) := \sup_{x\in B(y,r)} \frac{1}{|B(y,r)|}\int_{B(y,r)} |f(y)-m_{B(y,r)}(f)|\, dy$$

と定義する．ここで，$|\cdot|$はルベーグ測度，$B(y,r)$は半径r中心yのユークリッド球，$m_{B(y,r)}(f)$はfの$B(y,r)$での平均である．定義から明らかなようにこの作用素は定数を打ち消す．したがって，Sharp-極大不等式

$$\|f : L^p(\mathbf{R}^d)\| \le C_p \, \|M^\sharp f : L^p(\mathbf{R}^d)\|, 1<p<\infty$$

はすべての局所可積分関数には成立しない．先ほど触れたように定数関数を打ち消すためである．したがって，この定数関数の失う情報を補わないと，一般の関数にこの不等式は成立しない．右辺をその意味で大きくして，意味のある不等式を作るのが目的である．Morrey-ノルムはその重要な役割を果たす．具体的には次の結果を得る．ノルム同値の意味ですべての局所可積分関数に対して

$$\|f : \mathcal{M}^p_q(\mu)\| \sim \|M^\sharp f : \mathcal{M}^p_q(\mu)\| + \|f : \mathcal{M}^p_1(\mu)\|, 1<q\le p<\infty$$

が成り立つ．$M^\sharp$の定義はgrowth条件を満たすときの極大作用素に変更してある．定義はX. Tolsaによるものである．ルベーグ測度の時にはこの定義の変更は本質的ではない．この不等式から元のSharp-極大不等式を示せることおよびこの不等式の応用として，Commutator-のMorrey空間における有界性を示すことが出来る．

この論文では大半の結果はベクトル値不等式に拡張されている．ベクトル値拡張とはたとえば，線形作用素Tの$\mathcal{M}^p_q(\mu)$有界性

$$\|Tf : \mathcal{M}^p_q(\mu)\| \le C_{pq} \, \|f : \mathcal{M}^p_q(\mu)\|$$

がいえたときに

$$\left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} |Tf_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} : \mathcal{M}_q^p(\mu) \right\| \le C_{p,q,r} \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} : \mathcal{M}_q^p(\mu) \right\|$$

と不等式を拡張することである．この不等式は一見するとただの拡張にしか見えないが，Littlewood-Paley 分解などと絡んで，作用素の $L^p(\mu)$-有界性を示すのに大変有用である．Littlewood-Paley 分解から派生した Triebel-Lizorkin 空間や Besov 空間は近年，フラクタル上の解析，多様体上の解析，偏微分方程式などに活用されている非常に重要な空間である．特に Triebel-Lizorkin 空間の解析には Fefferman-Stein の不等式は非常に重要である．この論文では，今までのベクトル値不等式の応用として Triebel-Lizorkin-Morrey 空間と Besov-Morrey 空間を定義してそこでの特異積分作用素の有界性を示している．

Morrey 空間は先ほど見たように 2-parameter で補間性質などが一般には成立しないことが知られている．しかし，$\mathcal{M}_q^p(\mu)$ の定義において，β をとめて $q = \beta p$ となる p, q を束にして考えると，分数積分作用素はこの関数空間の束（族）から同じ関数空間の束に移ることを示すことが出来る．曽布川拓也氏と田中仁氏と共同でこの関数空間の束での補外の定理を見出すことが出来た．

このような束にした関数空間族にはそのほかいろいろな性質が成り立つのではないかと期待している．

また，Campanato 型のノルムが考えられてきているが，われわれは，増大条件の下これに対応する等価なノルムを得ることが出来て，X. Tolsa の考えた増大条件に対応する BMO 関数はわれわれの関数空間の極限であることも示せた．

この研究は一部東京大学研究拠点形成特任研究員の田中仁氏と岡山大学曽布川拓也氏との共同研究である．

参考文献

[1] S. Campanato, Caratterizzazione delle tracce di funzioni appartenenti ad una classe di Morrey insieme con le loro derivate prime, (Italian) Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **15** 1961 263–281.

[2] F. Nazarov, S. Treil and A. Volberg, Weak type estimates and Cotlar inequalities for Calderön-Zygmund operators on nonhomogeneous spaces, Internat. Math. Res. Notices (1998), 463–487.

[3] C. Morrey, On solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. **43** (1938), 126–166.